Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Band 151.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1921.

J. R. R.
#1

GENERAL LIBRARY
APR 19 1921
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Band 151.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 22. Dezember.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1920

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 48 Mark

Band 151. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Pólya, G., Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen . . . . . Seite 1

Epstein, Paul, Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. II. . . . . — 32

Perron, Oskar, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters . . . . . — 63

Schur, J., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen . . . . . — 79

Hensel, Kurt, Über die Zerlegung der Primteiler in relativ cyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die *Kummer*schen Körper . — 112

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die seit der Preisfestsetzung für den letzterschienenen (150.) Band abermals nicht unerheblich gestiegenen Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 151. Bande ab auf M. 48.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Der Mangel an Rohstoffen für die Papierfabrikation hat die Wirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können. er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10

Inhaltsverzeichnis des Bandes 151.

	Seite
Pólya, G., Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen	1— 31
Epstein, Paul, Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. II.	32— 62
Perron, Oskar, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters.	63— 78
Schur, J., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen	79—111
Hensel, Kurt, Über die Zerlegung der Primteiler in relativ cyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die *Kummer*schen Körper .	112—120
Fraenkel, Adolf, Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe . . .	121—166
Horn, J., *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen	167—199
Hensel, Kurt, Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper	200—209
Hensel, Kurt, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers	210—212

Ausgabedaten der Hefte von Band 151.

Heft 1/2 ausgegeben am 22. Dezember 1920
Heft 3/4 ausgegeben am 30. Juli 1921

Paul Stäckel †.

(1862—1919)

Die Redaktion des Journals hat die schmerzliche Pflicht, des schweren Verlusts zu gedenken, den die deutsche mathematische Wissenschaft durch das am 12. Dezember 1919 in Heidelberg erfolgte Ableben von Paul Stäckel erlitten hat. Aus vollem Schaffen wurde der bis in die letzte Zeit jugendfrische, unermüdlich tätige Mann durch eine kurze aber schwere Krankheit jäh hinweggerafft, und nur schwer werden sich die Lücken schließen lassen, die sein Hinscheiden in den zahlreichen wissenschaftlichen Verbänden gerissen hat, denen seine Mitarbeit zugute gekommen ist.

Für seine wissenschaftliche Persönlichkeit ist charakteristisch die glückliche Vereinigung mathematischer Erfindungsgabe mit kritischer Schärfe und ausgeprägtem geschichtlichem Sinn. Er hat die verschiedenen Gebiete der Analysis, die Differentialgeometrie, die analytische Mechanik und die Zahlentheorie durch scharfsinnige Untersuchungen gefördert, in der Geschichte der neueren Mathematik aber hat er richtunggebend gewirkt, indem er die moderne literarhistorische Methode auf die Darstellung der Entwicklung einzelner mathematischer Gedankengänge und des Werdegangs hervorragender Mathematiker angewandt hat. Die Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie, der Funktionentheorie, der Differentialgeometrie verdanken ihm Untersuchungen von bleibendem Wert, und seine Beiträge zur Beschreibung des Lebens und Wirkens von Euler, Gauß, Wolfgang und Johann Bolyai gehören zu dem Bedeutendsten, was über diese Männer geschrieben worden ist. Durch die Auffindung des wissenschaftlichen Tagebuchs von Gauß im Jahre 1898 hat er die Gaußforschung neu belebt, und seiner kraftvollen Initiative wird es in erster Linie zu danken sein, wenn wir in absehbarer Zeit eine Gesamtausgabe der Werke von Euler besitzen werden. Nicht minder wichtig war seine Mitarbeit an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, an den Berichten der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission und dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Seine Zugehörigkeit zu der Berliner mathematischen Schule machte ihn gleich am Beginn seiner schriftstellerischen Tätigkeit zum Mitarbeiter an unserem Journal, die Bände 106 bis 113 brachten in den Jahren 1890—1895 zehn Abhandlungen aus seiner Feder, und auch noch später, bis in die allerletzte Zeit, hat er wiederholt Ergebnisse seiner erstaunlichen Produktivität, die mehr als 170 wissenschaftliche Veröffentlichungen gezeitigt hat, in unserer Zeitschrift niedergelegt. In jüngster Zeit durften wir ihn unter den Mitwirkenden an der Herausgabe des Journals aufführen, leider ziert sein Name das Titelblatt von nur zwei Bänden.

Sein Leben war ganz der Wissenschaft hingegeben; er war stets hilfsbereit und uneigennützig, fördernd wo immer er ehrliches Streben sah, gerecht und ausgleichend, wo sich Gegensätze zeigten, ein begeisterter und erfolgreicher Lehrer, ein trefflicher Organisator. Sein Andenken wird in der Wissenschaft und bei allen, die das Glück hatten, ihm näher treten zu können, unvergessen bleiben.

Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen.

Von Herrn *G. Pólya* in Zürich.

Eine rationale Funktion, deren Potenzreihenentwicklung um den Punkt $z = 0$ nur rationale Koeffizienten enthält, ist der Quotient zweier Polynome $P(z)$ und $Q(z)$, wo $P(z)$ und $Q(z)$ ganzzahlige Koeffizienten, keine gemeinsame Wurzel und auch keinen gemeinsamen Zahlenfaktor (außer ± 1) besitzen. Ich setze

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t_2} z^2 + \cdots + \frac{s_n}{t_n} z^n + \cdots,$$

wo die beiden ganzen Zahlen s_n und t_n teilerfremd sind ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

Die arithmetische Natur der Nenner $t_0, t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ ist durch den *Eisenstein*schen Satz (der in unserem Falle, d. h. für rationale Funktionen, auf der Hand liegt) genügend klargelegt. Es gibt nämlich eine ganze Zahl T von der Eigenschaft, daß T^n durch t_n teilbar ist ($n = 1, 2, 3, \ldots$), d. h. die Zahl T ist so beschaffen, daß die Potenzreihe

$$\frac{P(Tz)}{Q(Tz)} - \frac{s_0}{t_0} = \frac{s_1 T}{t_1} z + \frac{s_2 T^2}{t_2} z^2 + \cdots$$

nur ganzzahlige Koeffizienten hat. Die Zahlen $t_0, t_1, \ldots t_n, \ldots$ sind also aus endlich vielen Primfaktoren, nämlich aus den Primfaktoren von T, zusammengesetzt.

Die arithmetische Natur der Zähler $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ scheint hingegen noch nicht untersucht und auch verwickelter zu sein. Wie die Beispiele

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n$$

zeigen, können die Zähler endlich viele (eventuell keine) oder auch unendlich viele Primfaktoren enthalten. Ich werde in vorliegender Arbeit *alle rationalen Funktionen bestimmen, in deren Reihenentwicklung die Zähler aus endlich vielen Primfaktoren zusammengesetzt sind.*

Es wird sich herausstellen, daß im allgemeinen die Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ unendlich viele Primfaktoren enthalten. Dafür daß sie nur aus endlich vielen Primfaktoren aufgebaut sein sollen, ist nämlich notwendig (aber noch lange nicht hinreichend), daß alle Wurzeln von $Q(z)$ voneinander verschieden und von der Form $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ sind, wo a, b, n rationale ganze Zahlen sind. Ferner ist notwendig, daß $Q(z)$, wenn es nicht vom ersten Grade ist, zwei verschiedene Wurzeln hat, deren Quotient eine Einheitswurzel ist. Letztere Bedingung besagt neben der ersterwähnten nur dann etwas Neues, wenn alle Wurzeln von $Q(z)$ rational sind; ich wollte aber diese Bedingung hervorheben, denn ihr Beweis bildet in der Begründung des vollen Satzes den springenden Punkt (vgl. den Satz II im zweiten Teile).

Man kann sich noch mit der Art und Weise befassen, wie die verschiedenen Primfaktoren in die Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ eingehen. Das prägnanteste Resultat, zu dem ich in dieser Richtung gelangt bin, spricht sich in folgendem Satze aus:

Besitzt das Integral einer rationalen Funktion eine Potenzreihenentwicklung, deren sämtliche Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, so ist dies Integral notwendigerweise selber eine rationale Funktion.

Vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil bringt den Beweis des eben ausgesprochenen Satzes über das Integral einer rationalen Funktion, der zweite Teil stellt das angedeutete Kriterium auf, das die beiden Fälle, wo $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ aus endlich vielen bzw. aus unendlich vielen Primfaktoren aufgebaut sind, auseinanderhält. Die beiden Teile sind von einander völlig unabhängig, so daß auch die Numerierung der Formeln, Sätze usw. in beiden Teilen getrennt erfolgen konnte.

Erster Teil.

Die Potenzreihe des Integrals.

1. Die uns bekannten Funktionen, deren Potenzreihenentwicklung nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt, sind von sehr verschiedener analytischer Natur. Es sind einerseits rationale oder algebraische Funktionen, andererseits sind es Funktionen mit singulären Linien oder unendlichvieldeutige Funktionen. Daß uns nur solche extremen Fälle bekannt sind, scheint nicht bloß auf einer Zufälligkeit des augenblicklichen Standes unserer Kenntnisse zu beruhen. Neuere Untersuchungen*) haben gezeigt, daß gewisse mittlere Fälle wirklich nicht vorkommen können. Es gibt z. B. keine meromorphen Funktionen, deren Potenzreihe nur ganzzahlige Koeffizienten enthält.

Die einfachsten unendlichvieldeutigen Funktionen entspringen aus der Integration der rationalen Funktionen. Ich zeige im folgenden, daß diese einfachen Transzendenten (sie sind gleich der Summe von endlichvielen Logarithmen und einer rationalen Funktion) *nicht* durch Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden können, d. h. ich zeige den schon in der Einleitung erwähnten

Satz I. *Besitzt das Integral einer rationalen Funktion eine Potenzreihenentwicklung, deren sämtliche Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, so ist dies Integral notwendigerweise selber eine rationale Funktion.*

Es waren funktionentheoretische Gesichtspunkte, die zur Auffindung von Satz I führten. Satz I bringt aber eigentlich nur eine einfache zahlentheoretische Eigenschaft der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen zum Ausdruck. Es sei

$$(1.) \qquad \frac{P(z)}{Q(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

eine solche Reihenentwicklung mit rationalen ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$. (Wären die Koeffizienten nur rational, nicht ganzzahlig, so läßt sich die Ganzzahligkeit, nach *Eisenstein*, leicht erreichen.) Es

---

*) Vgl. *Borel*, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, Bulletin des sciences mathématiques Bd. 18 (2. Folge), S. 22—25; ferner zwei Arbeiten des Verfassers: Über ganzwertige ganze Funktionen, Rendiconti, Palermo Bd. 40 und Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Mathematische Annalen Bd. 77.

handelt sich um die Frage: wann können die Koeffizienten

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

der Reihe nach durch die Glieder einer arithmetischen Progression

$$a, a+d, a+2d, \ldots a+nd, \ldots$$

teilbar sein? Die Zahlen a und d sind rational ganz, und es kann ohne Beschränkung $d > 0$ angenommen werden. Ist ein Glied $a + n_0 d = 0$, so wollen wir natürlich von a_{n_0} absehen, d. h. die um $a_{n_0} x^{n_0}$ verminderte rationale Funktion (1.) betrachten. Die erwähnte Frage kann auch so formuliert werden: wann enthält die Potenzreihenentwicklung

$$(2.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a+nd} z^{a+nd} = \int_0^z z^{a-1} \frac{P(z^d)}{Q(z^d)} dz$$

nur ganzzahlige Koeffizienten? Satz I besagt, daß dies höchstens dann der Fall sein kann, wenn alle Residua in der Partialbruchentwicklung der rationalen Funktion, die in (2.) rechts unter dem Integralzeichen steht, verschwinden, d. h. wenn die Funktion (2.) selber rational ist. Tritt letzteres ein, so sind auch die Koeffizienten der Potenzreihe (2.) wenigstens „im wesentlichen" ganzzahlig, dem *Eisenstein*schen Satz gemäß.

2*). Alle Funktionen $P(z), Q(z), R(z), \ldots p(z), q(z), r(z), \ldots$, die ich unter gegenwärtiger Nummer 2. betrachte, sind Polynome mit rationalen Koeffizienten. Mein Zweck ist, den Bruch

$$(3.) \qquad \frac{P(z)}{Q(z)},$$

dessen Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Wurzel haben, auf rationalem Wege zur Integration vorzubereiten. Dies geschieht in zwei Schritten.

1) Ich nehme an, daß $Q(z)$ in zwei teilerfremde Faktoren $S(z)$ und $T(z)$ zerfällt,

$$Q(z) = S(z)\, T(z).$$

Man bestimme $s(z)$ und $t(z)$ so, daß

$$s(z)\, S(z) + t(z)\, T(z) = 1$$

wird. Daraus folgt

---

*) Vgl. *Hermite*, Cours d'Analyse, Première partie (Paris 1873), S. 265—270.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{s(z)\,P(z)}{T(z)} + \frac{t(z)\,P(z)}{S(z)}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens zerlegt man (3.) in eine Summe von rationalen Funktionen, wo der Nenner jedes Summanden die Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Dies will ich durch die Formel

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\nu} \frac{P_\nu(z)}{Q_\nu(z)^{n_\nu}} \tag{4.}$$

andeuten. $Q_\mu(z)$ und $Q_\nu(z)$ sind teilerfremd, wenn $\mu \leqq \nu$.

2) Behandeln wir nunmehr den Bruch

$$\frac{R(z)}{S(z)^n},$$

wo $S(z)$ irreduzibel und $n \geqq 2$ ist. $S(z)$ ist gewiß teilerfremd zu seiner Derivierten $S'(z)$, und daher existieren $s(z)$ und $s_1(z)$, so daß

$$s(z)\,S(z) + s_1(z)\,S'(z) = R(z).$$

Ich führe die Polynome $H(z)$ und $R_1(z)$ durch die Formeln

$$s_1(z) = -(n-1)\,H(z),$$
$$s(z) = H'(z) + R_1(z)$$

ein. Es folgt

$$R(z) = (H'(z) + R_1(z))\;\; S(z) - (n-1)\,H(z)\,S'(z),$$
$$\frac{R(z)}{S(z)^n} = \frac{d}{dz}\left(\frac{H(z)}{S(z)^{n-1}}\right) + \frac{R_1(z)}{S(z)^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens entsteht

$$\frac{R(z)}{S(z)^n} = \frac{d}{dz}\left(\frac{H(z)}{S(z)^{n-1}}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{H_1(z)}{S(z)^{n-2}}\right) + \cdots + \frac{d}{dz}\left(\frac{H_{n-2}(z)}{S(z)}\right) + \frac{R_{n-1}(z)}{S(z)}.$$

Durch Division erhalte ich endlich

$$R_{n-1}(z) = S(z)\,\frac{dH_n(z)}{dz} + H_{n-1}(z),$$

wo $H_{n-1}(z)$ von niedrigerem Grade ist als $S(z)$ und $H_n(z)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Es kommt

$$\frac{R(z)}{S(z)^n} = \frac{d}{dz}\left(\frac{H(z)}{S(z)^{n-1}}\right) + \cdots + \frac{d}{dz}\left(\frac{H_{n-2}(z)}{S(z)}\right) + \frac{H_{n-1}(z)}{S(z)} + \frac{d}{dz}H_n(z).$$

Wendet man dies auf (4.) an, so ergibt sich

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\mu,\nu}\frac{d}{dz}\left(\frac{K_{\mu,\nu}(z)}{Q_\nu(z)^\mu}\right) + \sum_{\nu}\frac{K_\nu(z)}{Q_\nu(z)} + \frac{d}{dz}K(z). \tag{5.}$$

Das erste und dritte Glied auf der rechten Seite von (5.) lassen sich also unmittelbar integrieren, und ihr Integral ist eine rationale Funktion. Hingegen ist das Integral des mittleren Gliedes keine rationale Funktion, abgesehen von dem Falle, wo dieses mittlere Glied identisch verschwindet. Wenn es nämlich nicht verschwindet, so hat es, $Q(0) \gtrless 0$ vorausgesetzt, die Form

$$(6.) \qquad \sum_{\nu} \frac{K_\nu(z)}{Q_\nu(z)} = \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\omega_1} - z} + \frac{\alpha_2}{\frac{1}{\omega_2} - z} + \cdots + \frac{\alpha_r}{\frac{1}{\omega_r} - z},$$

wo

$$r \geqq 1,$$

$$\alpha_i \neq 0, \qquad \omega_i \neq 0, \qquad \omega_i - \omega_k \neq 0$$

$$(i \gtrless k;\ i, k = 1, 2, 3, \ldots r),$$

und es ist

$$\int \sum_{\nu} \frac{K_\nu(z)}{Q_\nu(z)}\, dz = -\alpha_1 \lg\left(z - \frac{1}{\omega_1}\right) - \cdots - \alpha_r \lg\left(z - \frac{1}{\omega_r}\right).$$

$\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots \frac{1}{\omega_r}$ bezeichnen gewisse Wurzeln von $Q(z)$ und sind als solche algebraische Zahlen. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ sind auch algebraisch.

3. Hat das Integral der Funktion (3.) nur ganzzahlige rationale Entwicklungskoeffizienten, so hat die Funktion (3.) selbst gewiß ganzzahlige und um so mehr rationale Entwicklungskoeffizienten. Wir können also die unter 2. dargelegte Reduktion auf (3.) anwenden und dadurch den Beweis von Satz I seinem springenden Punkte näher bringen. Wir haben zu beweisen, daß das Integral von (3.) gebrochene Entwicklungskoeffizienten enthalten muß, wenn es transzendent ist. Letzteres ist dann und nur dann der Fall, wenn das mittlere Glied der rechten Seite von (5.) nicht identisch verschwindet, sondern in die Form (6.) gesetzt werden kann.

Ich behaupte: man kann zwei rationale ganze Zahlen a und b so bestimmen, daß

1) sämtliche Koeffizienten des Polynoms

$$aK(bz)$$

ganzzahlig werden,

2) sämtliche Entwicklungskoeffizienten der rationalen Funktionen

$$\frac{aK_{\mu,\nu}(bz)}{Q_\nu(bz)^\mu}$$

ganzzahlig werden (die Potenzreihenentwicklung ist um $z = 0$ vorzunehmen),

3) sämtliche algebraische Zahlen

$$a\alpha_1, \quad a\alpha_2, \ldots a\alpha_r,$$
$$b\omega_1, \quad b\omega_2, \ldots b\omega_r$$

ganze algebraische Zahlen werden.

In der Tat, man kann a und b so wählen, daß sie irgendeiner der aufgezählten Bedingungen einzeln genügen. Bei 1) ist dies evident, bei 2) folgt es aus dem *Eisenstein*schen Satze, bei 3) aus der Bemerkung, daß jede algebraische Zahl der Quotient einer algebraischen ganzen Zahl und einer rationalen ganzen Zahl ist. Durch geeignete Produktbildung gelangt man zu zwei ganzen Zahlen a und b, die sämtlichen Bedingungen 1) 2) 3) zugleich genügen.

Wäre also das Integral von (3.) transzendent und hätte nur ganze rationale Entwicklungskoeffizienten, so hätte die Funktion

$$a\int \frac{P(bz)}{Q(bz)}\,b\,dz - aK(bz) - \sum_{\mu,\nu} \frac{aK_{\mu,\nu}(bz)}{Q_\nu(bz)^\mu}$$
$$= \int a \sum_\nu \frac{K_\nu(bz)}{Q_\nu(bz)}\,b\,dz$$
$$= \int \left(\frac{a\alpha_1 b\omega_1}{1-b\omega_1 z} + \cdots + \frac{a\alpha_r b\omega_\nu}{1-b\omega_r z}\right) dz$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\alpha_1(b\omega_1)^n + a\alpha_2(b\omega_2)^n + \cdots + a\alpha_r(b\omega_r)^n}{n}\, z^n$$

ebenfalls nur rationale ganze Entwicklungskoeffizienten. Ich werde zeigen, daß dies unmöglich ist.

4. Es gilt also, unter Vereinfachung der Bezeichnungen, folgendes zu zeigen:

Satz II. *Die $2r$ Zahlen*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r,$$
$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_r$$

seien algebraische ganze Zahlen,

$$\alpha_i \neq 0, \quad \omega_i \neq 0, \quad \omega_i - \omega_k \neq 0$$
$$(i \leqq k;\ i, k = 1, 2, \ldots r).$$

Dann können nicht alle Zahlen

$$(7.) \qquad \frac{\alpha_1\omega_1^n + \alpha_2\omega_2^n + \cdots + \alpha_r\omega_r^n}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

(algebraische) ganze Zahlen sein.

Mit Satz II sind wir bei dem springenden Punkte des Beweises angelangt. Ich bewies Satz II unter Anwendung gewisser einfacher Sätze der Idealtheorie (*Fermat*sche Kongruenz nach einem Primideal). Herr *Hurwitz*, dem ich meinen Beweis mitteilte, bemerkte, daß derselbe ohne wesentliche Änderung des Gedankenganges so gewendet werden kann, daß die Idealtheorie ganz entbehrlich wird. Ich will nur die auf einfacheren Prinzipien beruhende Beweisanordnung von *Hurwitz* mitteilen.

Man nennt zwei algebraische ganze Zahlen α und β teilerfremd*), wenn es zwei algebraische ganze Zahlen α_1 und β_1 gibt, so daß

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 1.$$

Ist α sowohl zu β wie zu γ teilerfremd, so ist α auch zu $\beta\gamma$ teilerfremd. Denn aus

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 1,$$
$$\alpha\alpha_2 + \gamma\gamma_1 = 1$$

folgt

$$\beta\gamma\,\beta_1\gamma_1 = 1 + \alpha(\alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2).$$

Es sei

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

die irreduzible rationale Gleichung, der die ganze Zahl α $(\alpha \neq 0)$ genügt. Geht die rationale Primzahl p in der rationalen ganzen Zahl a_m nicht auf, so sind p und α teilerfremd. In der Tat, es gibt zwei rationale ganze Zahlen u und v, so daß

$$pu + a_m v = 1$$

ist, woraus

$$pu - \alpha(a_{m-1} + \cdots + a_1\alpha^{m-2} + \alpha^{m-1})v = 1$$

folgt. In a_m gehen aber nur endlich viele Primzahlen auf, und daraus folgt die Tatsache: es gibt nur endlich viele rationale Primzahlen, die zu einer gegebenen algebraischen Zahl α $(\alpha \neq 0)$ nicht teilerfremd sind.

Kehren wir nun zu Satz II zurück. Es sei p eine der unendlich vielen rationalen Primzahlen, die zu sämtlichen $r+2$ ganzen Zahlen $\alpha_1, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ und δ teilerfremd sind, wo

$$\delta = \left|\omega_k^{i-1}\right|_{\substack{i \\ k}=1,2,\ldots r} = \prod_{i<k}^{1\ldots r}(\omega_k - \omega_i).$$

---

*) *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie, 4. Auflage, S. 532 ff.

Wären alle Zahlen ganz, die man aus (7.) erhält, wenn man

$$n = p, 2p, 3p, \ldots rp$$

setzt, so wäre umsomehr

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \omega_1^p + \alpha_2 \omega_2^p + \cdots + \alpha_r \omega_r^p \equiv 0 \pmod{p} \\
&\alpha_1 \omega_1^{2p} + \alpha_2 \omega_2^{2p} + \cdots + \alpha_r \omega_r^{2p} \equiv 0 \pmod{p} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_1 \omega_1^{rp} + \alpha_2 \omega_2^{rp} + \cdots + \alpha_r \omega_r^{rp} \equiv 0 \pmod{p}.
\end{aligned} \tag{8.}$$

Durch Elimination aus den Gleichungen (8.) erhält man

$$\alpha_1 \omega_1^p \omega_2^p \ldots \omega_r^p \prod_{i<k}^{1\ldots r} (\omega_k^p - \omega_i^p) \equiv 0 \pmod{p},$$

und wenn man die Teilbarkeit der Binomialkoeffizienten $\binom{p}{\nu}$ durch p beachtet, und $p > 2$ annimmt,

$$\alpha_1 \omega_1^p \omega_2^p \ldots \omega_r^p \prod_{i<k}^{1\ldots r} (\omega_k - \omega_i)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Zahl

$$\alpha_1 \omega_1^p \omega_2^p \ldots \omega_r^p \delta^p$$

ist aber zu p teilerfremd, da ihre Faktoren zu p teilerfremd sind.

Der Widerspruch löst sich nur, wenn man zugibt, daß unter den r Zahlen, die man aus (7.) für $n = p, 2p, \ldots rp$ erhält, wenigstens eine nicht ganz ist, w. z. b. w.

Satz II stellt keine Bedingungen in bezug auf Rationalität. So ersieht man aus dem Beweise, daß es auch *keine transzendente Funktion gibt die Integral einer rationalen Funktion ist und deren Potenzreihe nur algebraische ganze Zahlen zu Koeffizienten hat.*

Zweiter Teil.

Die Primfaktoren in den Zählern der Koeffizienten.

1. Die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t_2} z^2 + \cdots + \frac{s_n}{t_n} z^n + \cdots$$

soll rationale Koeffizienten haben. Die beiden rationalen ganzen Zahlen s_n und t_n seien teilerfremd ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Es sind zwei Fälle möglich: In den von Null verschiedenen unter den unendlich vielen Zahlen

$$s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots; \; t_0, t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$$

gehen entweder nur endlich viele oder unendlich viele (rationale) Primzahlen auf. Je nachdem der erste oder der zweite dieser Fälle vorliegt, sage ich von der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, daß sie endlich viele oder daß sie unendlich viele Primfaktoren enthält. Ob die Potenzreihenentwicklung einer rationalen oder algebraischen Funktion endlich viele oder unendlich viele Primfaktoren enthält, das hängt, nach dem *Eisenstein*schen Satze, bloß von der Beschaffenheit der Zähler $s_0, s_1, \ldots s_n, \ldots$ ab.

Ich werde einige einfache Operationen aufzählen, die aus einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, die nur endlich viele Primfaktoren enthält, eine neue Potenzreihe $\mathfrak{P}^*(z)$ von derselben Eigenschaft entstehen lassen.

1) Es sei $P(z)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Die Reihe

$$\mathfrak{P}^*(z) = \mathfrak{P}(z) + P(z)$$

entsteht aus $\mathfrak{P}(z)$ durch Addition von $P(z)$.

2) Es sei die Zahl a rational. Die Reihe

$$\mathfrak{P}^*(z) = a\,\mathfrak{P}(z)$$

entsteht aus $\mathfrak{P}(z)$ durch Multiplikation mit a.

3) Es sei die Zahl b rational. Die Reihe

$$\mathfrak{P}^*(z) = \mathfrak{P}(bz)$$

entsteht aus $\mathfrak{P}(z)$ durch Multiplikation der Variablen mit b.

4) Es sei m eine natürliche Zahl. Die Reihen

$$\mathfrak{P}_0(z), \mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots \mathfrak{P}_{m-1}(z)$$

sollen nur endlich viele Primfaktoren enthalten. Übrigens können einige von ihnen auch identisch verschwinden. Die Reihe

$$\mathfrak{P}^*(z) = \mathfrak{P}_0(z^m) + z\,\mathfrak{P}_1(z^m) + z^2\mathfrak{P}_2(z^m) + \cdots + z^{m-1}\mathfrak{P}_{m-1}(z^m),$$

die aus ihnen durch „Zusammensetzung“ entsteht, enthält auch nur endlich viele Primfaktoren.

Wenn übrigens die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(z)$ eine rationale Funktion darstellte, bzw. wenn die ursprünglichen Reihen $\mathfrak{P}_0(z), \mathfrak{P}_1(z), \ldots \mathfrak{P}_{m-1}(z)$ sämtlich rationale Funktionen darstellten, so wird die durch irgendeine der Operationen 1) 2) 3) 4) neu entstehende Reihe $\mathfrak{P}^*(z)$ offenbar wieder eine rationale Funktion darstellen.

Die einfachste gebrochene rationale Funktion, deren Potenzreihe nicht unendlich viele Primzahlen enthält, ist wohl die Funktion

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots,$$

die Summe der geometrischen Reihe. Ich behaupte nun den

Satz I. ***Jede rationale Funktion, deren Potenzreihe nur endlich viele Primfaktoren enthält, entsteht aus der geometrischen Reihe durch Anwendung einer endlichen Anzahl von Operationen*** 1) 2) 3) 4).

Anders kann man die in Satz I ausgesprochene Tatsache so formulieren: Der Gesamtheit G sollen alle und nur diejenigen Potenzreihen angehören, die rationale Funktionen darstellen und nur endlich viele Primfaktoren enthalten. Die Gesamtheit G hat folgende Eigenschaften:

I. Die Gesamtheit enthält die geometrische Reihe.

II. Die Operationen 1) 2) 3) 4) sind in ihr unbeschränkt ausführbar.

Satz I besagt, daß G die *kleinste* unter allen Gesamtheiten von Potenzreihen ist, denen die beiden Eigenschaften I und II zukommen.

Es ist nützlich, die einfachsten Funktionen ins Auge zu fassen, die aus der geometrischen Reihe durch die Operationen 1) 2) 3) 4) entstehen. Durch Anwendung von 2) und 3) erhält man

$$\frac{a}{1-bz},$$

durch m-malige Anwendung von 2) (im allgemeinen mit verschiedenen a-Werten) und durch Anwendung von 4) entsteht

$$\frac{a_0}{1-z^m} + z\frac{a_1}{1-z^m} + z^2\frac{a_2}{1-z^m} + \cdots + z^{m-1}\frac{a_{m-1}}{1-z^m} = \frac{P(z)}{1-z^m},$$

wo also $P(z)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $\leqq m-1$ mit rationalen Koeffizienten bedeutet usw.

Die Operationen 1) 2) 3) 4) einzeln durchgehend überzeugt man sich, daß mittelst deren aus der geometrischen Reihe nur solche rationale Funktionen entspringen können, deren sämtliche Pole einfach und von der Form $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ sind, wo a, b, n natürliche ganze Zahlen sind; so folgt aus Satz I das erste in der Einleitung ausgesprochene notwendige Kriterium.

2. Man kann eine und dieselbe rationale Funktion auf verschiedene Weisen aus der geometrischen Reihe durch Anwendung von 1) 2) 3) 4) erhalten. Es ist von Wichtigkeit, eine einfachste, normale Entstehungsweise anzugeben. Dazu dient die folgende Bemerkung: Übt man die Operationen 2) 3) auf eine durch die Operation 4) entstandene Reihe aus:

$$a\mathfrak{P}^*(bz) = a\mathfrak{P}_0(b^m z^m) + zab\mathfrak{P}_1(b^m z^m) + \cdots + z^{m-1}ab^{m-1}\mathfrak{P}_{m-1}(b^m z^m),$$

so kann man sich das Resultat auch so entstanden denken: Zuerst verwandelt man die Reihen

$$\mathfrak{P}_0(z),\ \mathfrak{P}_1(z),\ \ldots\ \mathfrak{P}_{m-1}(z)$$

mittelst 2) und 3) in

$$a\mathfrak{P}_0(b^m z),\ ab\mathfrak{P}(b^m z),\ \ldots\ ab^{m-1}\mathfrak{P}_{m-1}(b^m z),$$

und dann erhält man $a\mathfrak{P}^*(bz)$ aus den letzteren m Reihen durch Anwendung von 4). Daraus geht hervor: Man kann die Entstehung einer Reihe aus der geometrischen mittelst 1) 2) 3) 4) immer so einrichten, daß *jede Operation* 4) *nach sämtlichen Operationen* 2) *und* 3) *ausgeführt wird.* Übt man andrerseits irgend eine der Operationen 2) 3) 4) nach einer Operation 1) aus, so kann man sich leicht überzeugen, daß man zu demselben Resultate kommt, wenn man zuerst die betreffende Operation 2) bzw. 3) 4) ausübt, und dann zu der neuentstandenen Reihe ein gewisses Polynom addiert, also eine Operation 1) ausführt. Mehrere Operationen 1) nacheinander ausgeführt, geben wieder eine Operation 1); also kann man die Entstehung einer Reihe aus der geometrischen mittelst 1) 2) 3) 4) immer so einrichten, daß *nur eine einzige Operation* 1) *vorkommt, und diese wird nach allen übrigen ausgeführt.*

Unser Satz I behauptet also dies: Irgend eine rationale Funktion, deren Potenzreihe nur endlich viele Primfaktoren enthält, ist auf die folgende Weise aufgebaut: Man nimmt eine endliche Anzahl Funktionen

$$\frac{a_1}{1-b_1 z},\ \frac{a_2}{1-b_2 z},\ \cdots\ \frac{a_e}{1-b_e z},$$

die aus $\frac{1}{1-z}$ mittelst 2) und 3) entstehen, man setzt einige unter ihnen mit der Operation 4) zusammen, dann setzt man einige von den entstehenden rationalen Funktionen wieder mit der Operation 4) zusammen u. s. f., bis man schließlich nach einer endlichen Anzahl von solchen Operationen 4) den Aufbau durch das Hinzufügen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten beendigt.

Wollen wir Satz I beweisen, so genügt es, uns auf solche rationalen Funktionen zu beschränken, bei denen der Grad des Zählers niedriger ist, als der des Nenners. Denn es läßt sich irgend eine rationale Funktion in eine solche verwandeln durch Subtraktion eines Polynoms, das durch Division auf rationalem Wege bestimmt wird.

Um Satz I zu beweisen, müssen wir zeigen, daß der eben auseinandergesetzte Aufbau sich immer rückgängig machen läßt, wenn die Potenzreihe der rationalen Funktion nur endlich viele Primfaktoren enthält. Den letzten Schritt des Aufbaues, die darin vorkommende einzige Operation 1), haben wir schon rückgängig gemacht, indem wir uns auf solche Funktionen beschränkt haben, die für $z = \infty$ verschwinden. Um die übrigen Schritte rückgängig zu machen, müssen wir die rationale Funktion „zerfällen".

Zwischen der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

einerseits und den Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(z) = a_0 + a_m z + a_{2m} z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu m} z^\nu$$

$$\mathfrak{P}_1(z) = a_1 + a_{1+m} z + a_{1+2m} z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1+\nu m} z^\nu$$

. . . . . .

$$\mathfrak{P}_{m-1}(z) = a_{m-1} + a_{2m-1} z + a_{3m-1} z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m-1+\nu m} z^\nu$$

andrerseits besteht die Identität

$$\mathfrak{P}^*(z) = \mathfrak{P}_0(z^m) + z\mathfrak{P}_1(z^m) + \cdots + z^{m-1}\mathfrak{P}_{m-1}(z^m).$$

$\mathfrak{P}^*(z)$ ist aus $\mathfrak{P}_0(z), \mathfrak{P}_1(z), \ldots \mathfrak{P}_{m-1}(z)$ mittelst Operation 4) zusammengesetzt. Ich werde sagen, daß $\mathfrak{P}^*(z)$ *nach dem Modul m in die m Potenzreihen* $\mathfrak{P}_0(z), \mathfrak{P}_1(z), \ldots \mathfrak{P}_{m-1}(z)$ *„zerfällt"*.

Ich beweise in dieser Arbeit den

Satz II. *Wenn die Potenzreihe einer rationalen Funktion mit r verschiedenen Polen* ($r \geqq 2$) *nur endlich viele Primfaktoren enthält, so zerfällt sie nach einem passenden Modul m in die Potenzreihen solcher m rationalen Funktionen, deren jede weniger als r verschiedene Pole hat.*

Enthält eine Potenzreihe nur endlich viele Primfaktoren, so enthält offenbar jede der m Potenzreihen, in welche sie mod. m zerfällt, wieder nur endlich viele Primfaktoren. Wird also Satz II als richtig angenommen, so folgt daraus, daß jede Potenzreihe, die nur endlich viele Primfaktoren enthält und eine rationale Funktion darstellt, nach und nach in eine endliche Anzahl solcher rationalen Funktionen zerfällt werden kann, die nur einen einzigen Pol haben. Dieser einzige Pol muß nun von der ersten Ordnung sein, denn es besteht der

Satz III. *Wenn eine rationale Funktion $R(z)$ für $z=\infty$ verschwindet, nur einen Pol hat und ihre Potenzreihenentwicklung nur endlich viele Primfaktoren enthält, so ist diese rationale Funktion*

$$R(z)=\frac{a}{1-bz},$$

wo a, b rational.

Bestehen also die Sätze II und III, so ist Satz I als richtig erwiesen.

3. Die rationale Funktion $R(z)$ soll für $z=\infty$ verschwinden und sie soll den einzigen Pol $z=\frac{1}{\omega}$ von der Ordnung m besitzen ($\omega \neq 0$), d. h. es soll

$$R(z)=\frac{\alpha_0}{1-\omega z}+\frac{\alpha_1}{(1-\omega z)^2}+\cdots+\frac{\alpha_{m-1}}{(1-\omega z)^m},$$
$$\alpha_{m-1}\neq 0$$

sein. Die Potenzreihenentwicklung von $R(z)$ läßt sich am einfachsten schreiben, wenn man das Polynom $(m-1)$-ten Grades

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1\binom{x+1}{1}+\alpha_2\binom{x+2}{2}+\cdots+\alpha_{m-1}\binom{x+m-1}{m-1}$$
$$=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{1!}(x+1)+\frac{\alpha_2}{2!}(x+1)(x+2)+\cdots+\frac{\alpha_{m-1}}{m-1!}(x+1)\ldots(x+m-1)$$

einführt. Es ist nämlich

$$R(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}P(\nu)\omega^\nu z^\nu.$$

Sind die Koeffizienten von $R(z)$ rational, so ist ω rational, und die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ sind ebenfalls rational. Die ganze Zahl a sei so bestimmt, daß sämtliche Zahlen

$$a\alpha_0, a\frac{\alpha_1}{1!}, a\frac{\alpha_2}{2!}, \ldots a\frac{\alpha_{m-1}}{m-1!}$$

ganz sein sollen. Die Potenzreihenentwicklung

$$aR\left(\frac{z}{\omega}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}aP(\nu)z^\nu$$

hat ganzzahlige Koeffizienten und enthält dann und nur dann endlich viele Primfaktoren, wenn dies für die Potenzreihenentwicklung von $R(z)$ der Fall ist.

Satz III behauptet also: Wenn $m\geqq 2$, d. h. wenn $m-1\geqq 1$, kurz wenn das Polynom $aP(x)$ keine Konstante ist, so können die ganzen Zahlen

$$aP(0),\ aP(1),\ aP(2),\ aP(3),\ldots$$

nicht aus endlich vielen Primfaktoren aufgebaut sein.

Ich will zur Bezeichnung dieser Sachlage eine kurze Ausdrucksweise einführen. Es sei $F(x)$ eine ganzwertige Funktion, d. h. es sei eine solche Funktion, die für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ rationale ganze Zahlenwerte annimmt. Eine (rationale) Primzahl p heißt ein „Primteiler von $F(x)$" dann und nur dann, wenn es einen rationalen ganzzahligen Wert $x = \nu$ gibt ($\nu \geqq 0$), so daß $F(\nu) \geqq 0$ und $F(\nu)$ durch p teilbar wird. Mit dieser, übrigens althergebrachten Ausdrucksweise läßt sich Satz III so aussprechen:

Satz III′. *Jedes Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das keine Konstante ist, hat unendlich viele Primteiler.*

Satz III′ ist längst bekannt. Ich beabsichtige, auf seinen Beweis unter 4. zurückzukommen. —

Verschwindet die rationale Funktion $R(z)$ für $z = \infty$ und hat sie r verschiedene Pole $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots \frac{1}{\omega_r}$, so läßt sich ihre Potenzreihe so schreiben

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F(\nu)\, z^{\nu}, \tag{1.}$$

wo

$$F(x) = P_1(x)\,\omega_1^x + P_2(x)\,\omega_2^x + \cdots + P_r(x)\,\omega_r^x$$

ist, und $P_1(x), P_2(x), \ldots P_r(x)$ Polynome vom Grade $m_1 - 1$, bezw. $m_2 - 1, \ldots m_r - 1$ sind, wenn $m_1, m_2, \ldots m_r$ die bezüglichen Ordnungen der Pole $z = \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots \frac{1}{\omega_r}$ bedeuten. Umgekehrt, ist keines der Polynome $P_1(x), P_2(x), \ldots P_r(x)$ identisch $= 0$, und sind die r Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ alle voneinander und von 0 verschieden, so ist die durch die Formel (1.) definierte Funktion $R(z)$ eine rationale Funktion, die für $z = \infty$ verschwindet und r verschiedene Pole $z = \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots \frac{1}{\omega_r}$ hat.

Aus dem Gesagten folgt sofort: Die Potenzreihe einer rationalen Funktion, die für $z = \infty$ verschwindet, zerfällt nach irgend einem Modul m in m Potenzreihen, die wieder für $z = \infty$ verschwindende rationale Funktionen darstellen.

In der Tat, setzen wir

$$F_h(x) = F(h + mx) = \omega_1^h P_1(h + mx)\,\omega_1^{mx} + \cdots + \omega_r^h P_r(h + mx)\,\omega_r^{mx}$$

$$R_h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_h(\nu)\, z^{\nu} \tag{2.}$$

$$(h = 0, 1, 2, 3, \ldots m - 1)$$

so daß die Identität in z

$$R(z) = R_0(z^m) + zR_1(z^m) + \cdots + z^{m-1}R_{m-1}(z^m)$$

zwischen der Funktion (1.) und den eben definierten (2.) besteht, so sind die Funktionen $R_0(z), R_1(z), \ldots R_m(z)$ rational, und sie verschwinden für $z = \infty$. Sind die r Zahlen $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_r^m$ alle verschieden, so hat jede dieser m Funktionen r verschiedene Pole, nämlich die Pole $z = \frac{1}{\omega_1^m}, \frac{1}{\omega_2^m}, \ldots \frac{1}{\omega_r^m}$. Gibt es unter den Zahlen $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_r^m$ zwei oder mehr gleiche, so wird jede der m Funktionen $R_0(z), R_1(z), \ldots R_m(z)$ weniger als r verschiedene Pole haben, und einige unter ihnen können sogar identisch verschwinden. Ist $\omega_i^m = \omega_k^m$, so ist $\frac{\omega_i}{\omega_k}$ eine m-te Einheitswurzel. So ergibt sich der für unseren Zweck sehr wichtige Satz: *Die Potenzreihe einer rationalen Funktion, die r verschiedene Pole $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots \frac{1}{\omega_r}$ hat, zerfällt nach dem Modul m dann und nur dann in solche Potenzreihen, deren jede weniger als r Pole hat, wenn es unter den r Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ zwei verschiedene ω_i und ω_k gibt, deren Verhältnis eine m-te Einheitswurzel ist.*

Was behauptet also Satz II? Satz II behauptet, daß die rationale Funktion $R(z)$, wenn ihre Potenzreihe nur endlich viele Primfaktoren enthält, sicherlich zwei verschiedene Pole haben muß, deren Quotient eine Einheitswurzel ist. Oder, was dasselbe ist, Satz II behauptet dies: Wenn die rationale Funktion $R(z)$ keine zwei Pole hat, deren Quotient eine Einheitswurzel ist, so enthält die (als rationalzahlig vorausgesetzte) Potenzreihenentwicklung von $R(z)$ unendlich viele Primfaktoren.

Sind die Koeffizienten der Potenzreihe (1.) rationale Zahlen, so ist die rationale Funktion $R(z)$ der Quotient zweier Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, und die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$, die reziproken Wurzeln des Nenners von $R(z)$, sind algebraische Zahlen. Ebenso sind die Koeffizienten der Polynome $P_1(x), P_2(x), \ldots P_r(x)$ algebraische Zahlen. Jede algebraische Zahl ist der Quotient einer algebraischen ganzen Zahl und einer rationalen ganzen Zahl. Daher können wir zwei rationale ganze Zahlen a und b $(a > 0, b > 0)$ so bestimmen, daß alle Koeffizienten der Polynome

$$aP_1(x), \quad aP_2(x), \ldots \quad aP_r(x)$$

und alle r Zahlen

$$b\omega_1, \quad b\omega_2, \ldots \quad b\omega_r$$

algebraische ganze Zahlen werden. Dann wird die Funktion

$$aF(x)b^x = aP_1(x)(\omega_1 b)^x + \cdots + aP_r(x)(\omega_r b)^x$$

für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ rationale ganze Zahlen darstellen, d. h. sie wird eine ganzwertige Funktion.

Die beiden Potenzreihen

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F(\nu) z \qquad \text{und} \qquad aR(bz) = \sum_{\nu=0}^{\infty} aF(\nu) b^\nu z^\nu$$

enthalten nun zu gleicher Zeit unendlichviele oder endlichviele Primfaktoren. Überlegt man dies alles, so erkennt man, daß Satz II gleichbedeutend ist mit

Satz II′. *Die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ und sämtliche Koeffizienten der Polynome $P_1(x), P_2(x), \ldots P_r(x)$ seien ganze algebraische Zahlen, und die Funktion*

$$(3.) \qquad F(x) = P_1(x)\omega_1^x + P_2(x)\omega_2^x + \cdots + P_r(x)\omega_r^x$$

soll für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ rationale, also rationale ganze Zahlenwerte annehmen.

Ist keines der $\frac{r(r-1)}{2}$ Verhältnisse

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \cdots \frac{\omega_r}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_2}, \cdots \frac{\omega_r}{\omega_2}, \cdots \frac{\omega_r}{\omega_{r-1}}$$

einer Einheitswurzel gleich, so hat die Funktion (3.) *unendlich viele Primteiler.*

In der Aussage des Satzes II′ ist stillschweigend vorausgesetzt, daß $r \geqq 2$ ist, daß keine der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ verschwindet und keines der Polynome $P_1(x), P_2(x), \ldots P_r(x)$ identisch verschwindet.

Mit Satz II′ wird also auch Satz I bewiesen sein. Umgekehrt, Satz II′ enthält den wichtigsten Teil von Satz I, und in seinem Beweise konzentrieren sich alle wesentlichen Schwierigkeiten des Problems.

4. Satz III′ ist, wie gesagt, wohl bekannt. Sein üblicher Beweis stimmt im wesentlichen überein mit dem klassischen Verfahren *Euklids*, wodurch er die Existenz unendlich vieler Primzahlen dargetan hat, und verläuft so: Da das Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$$

keine Konstante ist, gibt es gewiß ganzzahlige Werte von x, für welche

$P(x)$ nicht verschwindet. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$P(0) = a_0 \gtrless 0.$$

Es führt zu einem Widerspruch, anzunehmen, daß $P(x)$ nur die Primteiler $p_1, p_2, \ldots p_l$ hat. Denn jeder Primteiler des Polynoms

$$(4.) \qquad \frac{P(p_1 p_2 \ldots p_l a_0 x)}{a_0} = 1 + a_1 p_1 p_2 \ldots p_l x + \cdots$$

ist Primteiler von $P(x)$. Das Polynom (4.) wird aber bei keinem ganzzahligen Wert x durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_l$ teilbar, da doch sein Wert $\equiv 1 \pmod{p_1 p_2, \ldots p_l}$ ist. Es gibt aber ein ganzzahliges x, für welches der Wert von (4.) von allen drei Zahlen $0, +1, -1$ verschieden ausfällt, also durch eine Primzahl q teilbar ist; so hat notwendigerweise (4.) und damit $P(x)$ einen von $p_1, p_2, \ldots p_l$ verschiedenen Primteiler q.

Man beachte folgende Wendung dieser klassischen Schlußweise: Es sei angenommen, daß $P(x)$ nur die Primteiler $p_1, p_2, \ldots p_l$ hat. Es sei a ein ganzzahliger Wert, so daß

$$P(a) \gtrless 0$$

ausfällt, und $p_1^{m_1-1}, p_2^{m_2-1}, \ldots p_l^{m_l-1}$ seien die höchsten Potenzen von p_1, bzw. von $p_2, \ldots p_l$, die in $P(a)$ aufgehen, so daß

$$P(a) \not\equiv 0 \pmod{p_1^{m_1}}, \quad P(a) \not\equiv 0 \pmod{p_2^{m_2}}, \ldots \quad P(a) \not\equiv 0 \pmod{p_l^{m_l}}.$$

Man setze

$$d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_l^{m_l}.$$

Es ist für $t = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(a + dt) \equiv P(a) \not\equiv 0 \pmod{p_1^{m_1}}, \ldots P(a + dt) \equiv P(a) \not\equiv 0 \pmod{p_l^{m_l}},$$

und da $P(a + dt)$ außer $p_1, p_2, \ldots p_l$ durch keine andere Primzahl teilbar sein soll, ist notwendigerweise

$$(5.) \qquad |P(a + dt)| \leqq p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1} \ldots p_l^{m_l-1}$$

für $t = 1, 2, 3, \ldots$. Wenn aber $P(x)$ keine Konstante ist, so muß $P(x)$ bei genügend großem x jeden vorgegebenen Wert übersteigen, und das ergibt einen Widerspruch mit (5.).

Mir gelang es nun, eben diese zweite Wendung des Beweises von Satz III′ sinngemäß zu verallgemeinern. Ich will die Zwischenstufen dieser Verallgemeinerung nicht völlig verwischen, und ich will daher zuerst folgenden leichter zugänglichen speziellen Fall des Satzes II′ beweisen.

Satz II''. *Es seien $b_1, b_2, \dots b_r$ voneinander verschiedene rationale ganze positive Zahlen*

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_r, \tag{6.}$$

und die Polynome $P_1(x), P_2(x), \dots P_r(x)$ sollen rationale ganze Koeffizienten haben. Dann hat die Funktion

$$F(x) = P_1(x)\, b_1^x + P_2(x)\, b_2^x + \cdots + P_r(x)\, b_r^x \tag{7.}$$

unendlich viele Primteiler.

Es ist wieder stillschweigend vorausgesetzt worden, daß

$$r \geqq 2, \qquad P_i(x) \not\equiv 0.$$

Ich kann ohne Beschränkung voraussetzen, daß die Zahlen $b_1, b_2, \dots b_r$ relativ prim sind. Denn wäre der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $b_1, b_2, \dots b_r$

$$(b_1, b_2, \dots b_r) = d > 1,$$

so genügte es, von der ganzwertigen Funktion

$$F(x)\, d^{-x} = P_1(x)\left(\frac{b_1}{d}\right)^x + P_2(x)\left(\frac{b_2}{d}\right)^x + \cdots + P_r(x)\left(\frac{b_r}{d}\right)^x$$

nachzuweisen, daß sie unendlich viele Primteiler hat.

Wächst x durch positive Werte ins Unendliche, so strebt $|F(x)|$ auch gegen $+\infty$. Dasselbe gilt allgemeiner von den Funktionen

$$b_i^x |P_i(x)| - b_{i-1}^x |P_{i-1}(x)| - \cdots - b_1^x |P_1(x)| \tag{8.}$$
$$(i = 1, 2, \dots r)$$

und man kann daher einen positiven ganzzahligen Wert $x = a$ finden, für den alle Ausdrücke (8.) positiv ausfallen.

Es sei nun angenommen, daß die Funktion (7.) nur endlich viele Primteiler $p_1, p_2, \dots p_l$ hat. Die ganzen Zahlen $b_1, b_2, \dots b_r$ zerfallen, mod. p_j betrachtet, in zwei Klassen: in die erste Klasse gehören diejenigen, die durch p_j teilbar sind, in die zweite Klasse diejenigen, die durch p_j nicht teilbar sind. Die erste Klasse kann eventuell leer sein, aber die zweite Klasse enthält gewiß einige der Zahlen b_i, sagen wir $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots b_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, denn nach unserer kürzlich gerechtfertigten Annahme ist

$$(b_1, b_2, \dots b_r) = 1.$$

Ich setze

$$\Phi_j(x) = P_{i_1}(x)\, b_{i_1}^x + P_{i_2}(x)\, b_{i_2}^x + \cdots + P_{i_k}(x)\, b_{i_k}^x.$$

Es ist

$$|\Phi_j(a)| \geqq b_{i_k}^a |P_{i_k}(a)| - b_{i_{k-1}}^a |P_{i_{k-1}}(a)| - \cdots - b_{i_1}^a |P_{i_1}(a)|$$
$$\geqq b_{i_k}^a |P_{i_k}(a)| - \sum_{\nu=1}^{i_k-1} b_\nu^a |P_\nu(a)|$$
$$> 0,$$

da doch für $x = a$ alle Ausdrücke (8.) positiv ausfallen. Die ganze Zahl $\Phi_j(a)$ ist also von 0 verschieden. Es sei $p_j^{m_j-1}$ die höchste Potenz von p_j, die in $\Phi_j(a)$ aufgeht, d. h. es sei

$$\Phi_j(a) \equiv 0 \pmod{p_i^{m_j-1}}, \qquad \Phi_j(a) \not\equiv 0 \pmod{p_j^{m_j}}.$$

Denken wir uns alle Funktionen $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots \Phi_l(x)$ und alle Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_l$ auf die besagte Weise bestimmt, und setzen wir

$$d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_l^{m_l} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_l - 1).$$

Erteilen wir t die Werte $t = 1, 2, 3, \ldots$. Es ist

$$P_i(a + dt) \equiv P_i(a) \pmod{p_j^{m_j}}, \tag{9.}$$

da dt durch $p_j^{m_j}$ teilbar ist. Ist

$$b_i \not\equiv 0 \pmod{p_j},$$

so ist

$$b_i^{a+dt} \equiv b_i^a \pmod{p_j^{m_j}}, \tag{10.}$$

da doch dt teilbar ist durch

$$p_j^{m_j} - p_j^{m_j-1} = \varphi(p_j^{m_j}).$$

Ist hingegen

$$b_k \equiv 0 \pmod{p_j},$$

so ist

$$b_k^{a+dt} \equiv 0 \pmod{p_j^{m_j}}, \tag{11.}$$

da

$$a + dt \geqq d \geqq p_j^{m_j} > m_j$$

ist. Aus (11.), (9.), (10.) folgt nun nacheinander

$$F(a + dt) \equiv \Phi_j(a + dt) \equiv \Phi_j(a) \not\equiv 0 \pmod{p_j^{m_j}}.$$

Die ganze Zahl $F(a + dt)$ kann also höchstens durch die $(m_1 - 1)$-te, bzw. $(m_2 - 1)$-te, $\ldots$ $(m_l - 1)$-te Potenz von $p_1, p_2, \ldots p_l$ teilbar sein. Da sie durch keine andere Primzahl teilbar sein soll, folgt

$$|F(a + dt)| \leqq p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1} \ldots p_l^{m_l-1}$$

für $t = 1, 2, 3, \ldots$, ein offenbarer Widerspruch, da doch

$$\lim_{x=+\infty} |F(x)| = +\infty.$$

Somit ist Satz II'' bewiesen. Die Beweisidee, die wir nun schon an zwei Beispielen erläutert haben, muß aber eingehend umgearbeitet und ausgebildet werden, bevor sie zum Beweise des vollen Satzes II' tauglich wird. Es gilt hauptsächlich zwei Schwierigkeiten zu überwinden. Erstens muß die Befreiung der Zahlen $b_1, b_2, \dots b_r$ vom größten gemeinsamen Teiler mittels einfacher Division im Falle der allgemeinen algebraischen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$, die in (3.) auftreten, durch einen umständlicheren Prozeß ersetzt werden. Zweitens sind die Wachstumsverhältnisse der allgemeinen Funktion (3.) viel verwickelter als die der speziellen Funktion (7.). Dieser Komplikation muß durch eine ganze Reihe von Hilfssätzen Rechnung getragen werden (vgl. unter 6).

Beachtet der Leser diese Bemerkungen, so wird er den Leitfaden der nun folgenden etwas längeren Schlußreihe nicht verlieren.

5. Hilfssatz I*). *Die elementaren symmetrischen Funktionen der r ganzen algebraischen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ sollen sämtlich rational (also rational ganz) sein.*

Es existiert dann eine natürliche ganze Zahl e, so daß der größte gemeinschaftliche Teiler von $\omega_1^e, \omega_2^e, \dots \omega_r^e$ eine rationale ganze Zahl ist.

Die elementaren symmetrischen Funktionen $C_1, C_2, \dots C_r$ von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ sind durch die Identität in u

$$(u-\omega_1)(u-\omega_2)\dots(u-\omega_r) = u^r - C_1 u^{r-1} + C_2 u^{r-2} - \dots + (-1)^r C_r$$

definiert, und sie sind, gemäß Voraussetzung, rationale ganze Zahlen.

Nach der Theorie der algebraischen ganzen Zahlen existiert eine ganze Zahl δ, so daß die r Zahlen

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{\delta}, \omega_2' = \frac{\omega_2}{\delta}, \dots \omega_r' = \frac{\omega_r}{\delta}$$

ganz sind und 1 zum größten gemeinschaftlichen Teiler haben. Die Zahlen $\omega_1', \omega_2', \dots \omega_r'$ genügen der Gleichung

$$(12.) \qquad u^r - \frac{C_1}{\delta} u^{r-1} + \frac{C_2}{\delta^2} u^{r-2} - \dots + (-1)^r \frac{C_r}{\delta^r} = 0.$$

Die Zahlen $\frac{C_1}{\delta}, \frac{C_2}{\delta^2}, \dots \frac{C_r}{\delta^r}$ sind ersichtlich ganze Zahlen.

Es sei die rationale ganze Zahl d der größte gemeinschaftliche Teiler der r Zahlen

---

*) Vgl. *Hilbert*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, S. 247—249.

$$C_1^{r!},\ C_2^{\frac{r!}{2}},\ C_3^{\frac{r!}{3}},\ \dots\ C_r^{\frac{r!}{r}}.$$

Da die Zahlen

$$\text{(13.)}\qquad \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^{r!}=\frac{C_1^{r!}}{\delta^{r!}},\ \left(\frac{C_2}{\delta^2}\right)^{\frac{r!}{2}}=\frac{C_2^{\frac{r!}{2}}}{\delta^{r!}},\ \dots\left(\frac{C_r}{\delta^r}\right)^{\frac{r!}{r}}=\frac{C_r^{\frac{r!}{r}}}{\delta^{r!}}$$

ganze Zahlen sind, muß $\delta^{r!}$ in d aufgehen. Ich behaupte, daß $\frac{d}{\delta^{r!}}$ eine Einheit ist.

Angenommen, es wäre nicht so, dann betrachten wir einen Körper K, der die $r+1$ Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ und δ enthält. Jedes Primideal dieses Körpers K, das in $\frac{d}{\delta^{r!}}$ aufgeht, müßte alle Zahlen (13.), folglich alle Koeffizienten der Gleichung (12.), folglich alle Zahlen $\omega_1'^r, \omega_2'^r, \dots \omega_r'^r$ und daher endlich alle Zahlen $\omega_1', \omega_2', \dots \omega_r'$ teilen. Letzteres ist sicherlich ausgeschlossen, da

$$(\omega_1', \omega_2', \dots \omega_r') = 1.$$

Daher ist $\frac{d}{\delta^{r!}}$ eine Einheit und die Zahlen

$$\omega_1^{r!},\ \omega_2^{r!},\ \dots\ \omega_r^{r!}$$

haben zum größten gemeinschaftlichen Teiler die ganze rationale Zahl d, w. z. b. w.

Bezeichnen wir mit e den kleinstmöglichen Wert ($e \geqq 1$), für den $(\omega_1^e, \omega_2^e, \dots \omega_r^e)$ rational wird, so ist e nach dem Vorangehenden ein Teiler von $r!$. Im allgemeinen ist $e > 1$.

Kehren wir nun zu unserer Funktion (3.) zurück. Die elementaren symmetrischen Funktionen der in (3.) auftretenden Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ sind rational, denn diese r Zahlen sind die verschiedenen Wurzeln des Nenners der rationalen Funktion

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F(\nu) z^\nu,$$

die rationale Entwicklungskoeffizienten hat und folglich der Quotient zweier Polynome mit rationalen Koeffizienten ist. Hilfssatz I ist also anwendbar, und es sei die rationale ganze Zahl d der größte gemeinschaftliche Teiler der Potenzen $\omega_1^e, \omega_2^e, \dots \omega_r^e$.

Die e Funktionen

$$F(h+ex)\,d^{-x} = \omega_1^h P_1(h+ex)\left(\frac{\omega_1^e}{d}\right)^x + \dots + \omega_r^h P_r(h+ex)\left(\frac{\omega_r^e}{d}\right)^x$$

$$(h = 0, 1, 2, \dots r-1)$$

sind ganzwertig, und ihre Primteiler sind die Primteiler der Funktionen (3.). Die ganzen Zahlen

$$\frac{\omega_1^e}{d}, \frac{\omega_2^e}{d}, \cdots \frac{\omega_r^e}{d}$$

erfüllen die Bedingung, daß der Quotient von irgend zweien keine Einheitswurzel ist, und überdies ist

$$\left(\frac{\omega_1^e}{d}, \frac{\omega_2^e}{d}, \cdots \frac{\omega_r^e}{d}\right) = 1.$$

Es genügt uns also, Satz II′ unter der Annahme zu beweisen, daß $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ teilerfremd sind.

6. Ich beweise nun eine Reihe von Hilfssätzen, die ich dann später in umgekehrter Reihenfolge zur Anwendung bringen will.

Hilfssatz II*). *Die rationale Funktion $R(z)$ soll im Innern des Einheitskreises keine Pole haben, am Rande des Einheiskreises nur Pole erster Ordnung, und die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ihrer Potenzreihenentwicklung*

$$R(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

seien rationale ganze Zahlen. — Dann ist

$$R(z) = \frac{P(z)}{1 - z^h}, \tag{14.}$$

wo $P(z)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten bezeichnet.

Sind die Pole von $R(z)$ am Einheitskreise $e^{i\varphi_1}, \ldots e^{i\varphi_k}$ ($\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ reell), so ist

$$R(z) = \frac{B_1}{1 - z e^{-i\varphi_1}} + \cdots + \frac{B_k}{1 - z e^{-i\varphi_k}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

wo

$$\lim_{n=\infty} b_n = 0. \tag{15.}$$

Es ist

$$a_n = B_1 e^{-i\varphi_1 n} + B_2 e^{-i\varphi_2 n} + \cdots + B_k e^{-i\varphi_k n} + b_n$$

$$|a_n| \leqq |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_k| + |b_n|.$$

Wegen (15.) ist also die Folge

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{16.}$$

---

*) Vgl. *Fatou*, Sur les séries entières à coefficients entiers, Comptes Rendus, Bd. 138 (1904, 1) S. 342—344. *Landau*, Solution de la Question 1852 (Laguerre), Nouvelles Annales, Bd. 3, 4te Folge (1903).

beschränkt. Da nun alle Zahlen (16.) rational ganz sind, gibt es unter ihnen nur endlich viele verschiedene.

Es genügt, den Fall zu betrachten, wo alle $a_n \geqq 0$ sind. Denn die beiden Reihen

$$R(z) \quad \text{und} \quad R(z) + \frac{m}{1-z}$$

sind zugleich von der Form (14.) oder nicht, und, da die Zahlen (16.) ein Minimum besitzen, läßt sich die natürliche ganze Zahl m immer so bestimmen, daß die letztere Reihe keine negativen Koeffizienten hat.

Es sei also $g-1$ das Maximum der positiven Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$0 \leqq a_n \leqq g-1.$$

Da $R(z)$ der Quotient zweier Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten ist, muß die Zahl

$$R\left(\frac{1}{g}\right) = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \frac{a_3}{g^3} + \cdots$$

rational sein. Sie ist im g-adischen System aufgeschrieben, und daher muß die Folge ihrer Ziffern $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von einem gewissen Gliede an periodisch sein. Ist die Länge dieser Periode h, so ist $R(z)$ von der Form (14.), w. z. b. w. —

Betrachten wir die Potenzreihenentwicklung einer rationalen Funktion

$$R(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \tag{17.}$$

Es sei s der Grad des Nenners von $R(z)$, wobei $R(z)$ als der Quotient zweier teilerfremder Polynome gedacht wird. Die Zahl s ist also die Summe der Ordnungen aller (im Endlichen liegenden) Pole von $R(z)$. Ich betrachte die Größe

$$A_n = \text{Max}\,(|a_n|, |a_{n+1}|, \ldots |a_{n+s-1}|).$$

A_n heißt also der absolute Betrag des absolut größten unter den s sukzessiven Koeffizienten $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+s-1}$ der Reihe (17.). Sei ϱ der Konvergenzradius der Reihe (17.). Ich beweise den

Hilfssatz III. *Es ist*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n} = \frac{1}{\varrho}. \tag{18.}$$

Es ist evident, daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{A_n} = \frac{1}{\varrho}, \tag{19.}$$

und der springende Punkt des Hilfssatzes III ist eben der, daß der Grenzwert (18.) existiert.

Hilfssatz III ist offenbar richtig in dem Falle, wo an dem Konvergenzkreise von (17.) nur ein Pol $z = \varrho e^{i\varphi}$ u. zw. von der ersten Ordnung liegt. Dann ist nämlich

$$R(z) = \frac{A}{1 - \frac{z}{\varrho e^{i\varphi}}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \tag{20.}$$

wo die Reihe $\Sigma b_n z^n$ für $|z| = \varrho$ konvergiert, wo also

$$\lim_{n=\infty} b_n \varrho^n = 0.$$

Es ergibt sich aus (20.)

$$a_n = \frac{A}{\varrho^n e^{in\varphi}} + b_n = \frac{A e^{-in\varphi} + b_n \varrho^n}{\varrho^n},$$

woraus, wie wohl bekannt,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho}$$

folgt. Nun beweist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{A_n} \geqq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho}$$

zusammen mit (19.) die Gleichung (18.).

Auf den eben behandelten speziellen Fall läßt sich nun der allgemeine Fall folgendermaßen zurückführen: Es sei k die Summe der Ordnungen derjenigen Pole von $R(z)$, die am Rande des Konvergenzkreises $|z| = \varrho$ liegen. Es ist $k \leqq s$. Es läßt sich ein Polynom $(k-1)$-ten Grades

$$z^{k-1} + c_1 z^{k-2} + c_2 z^{k-3} + \cdots + c_{k-1}$$

so bestimmen, daß die rationale Funktion

$$(z^{k-1} + c_1 z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}) R(z) = \Sigma x^{n+k-1} (a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1})$$

nur einen Pol erster Ordnung am Kreise $|z| = \varrho$ hat. Daher ist

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}|} = \frac{1}{\varrho}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} |a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}| &\leqq (1 + |c_1| + \cdots + |c_{k-1}|) \operatorname{Max}(|a_n|, \ldots |a_{n+k-1}|) \\ &\leqq (1 + |c_1| + \cdots + |c_{k-1}|) A_n, \end{aligned}$$

woraus

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{A_n} \geqq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}|}{1 + |c_1| + \cdots + c_{k-1}|}} = \frac{1}{\varrho}$$

folgt, was zusammen mit (19.) den vollen Hilfssatz III ergibt.

Hilfssatz IV. *Es sei* $\varrho = 1$, *und* $R(z)$ *soll am Kreise* $|z| = 1$ *mindestens einen Pol haben, der nicht von der ersten Ordnung ist. Dann ist*

$$\lim_{n=\infty} A_n = +\infty.$$

Man betrachte zuerst den speziellen Fall, wo $R(z)$ am Kreise $|z| = 1$ nur einen Pol $z = e^{i\varphi}$, u. zw. von der Ordnung 2 besitzt. Dieser Fall ist leicht zu erledigen und übrigens auch wohl bekannt. Den allgemeinen Fall, wo die Summe der Ordnungen aller am Einheitskreise liegenden Pole von $R(z)$ etwa k ist $(2 \leqq k \leqq s)$, führt man auf den erwähnten speziellen durch Multiplikation mit einem geeignet gewählten Polynom $(k-2)$-ten Grades zurück, also mit Hilfe des im Beweise von Hilfssatz III angewandten Kunstgriffes.

Betrachten wir nun eine Funktion

$$\Phi(x) = P_1(x)\,\omega_1^x + P_2(x)\,\omega_2^x + \cdots + P_k(x)\,\omega_k^x$$

der ganzzahligen Variablen x, wo $P_1(x), P_2(x), \ldots P_k(x)$ Polynome bedeuten, deren Koeffizienten algebraische ganze Zahlen sind, und wo die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ ebenfalls algebraische ganze Zahlen sind. Es sei K ein Körper, der alle diese ganzen Zahlen enthält, und $\mathfrak{p}$ ein in keiner der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ aufgehendes Primideal des Körpers K.

Es sei vorausgesetzt, daß keines der $\frac{k(k-1)}{2}$ Verhältnisse

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \cdots \frac{\omega_k}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_2}, \cdots \frac{\omega_k}{\omega_2}, \cdots \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}$$

einer Einheitswurzel gleichkommt. Unter dieser Bedingung besteht der

Hilfssatz V. *Es sei eine arithmetische Progression*

(21.) $$a,\ a+d,\quad a+2d,\quad a+3d, \ldots$$

vorgegeben, deren Anfangsglied a *und Differenz* d *natürliche ganze Zahlen sind. Dann läßt sich eine arithmetische Progression*

(22.) $$a_1,\quad a_1+d_1,\quad a_1+2d_1,\quad a_1+3d_1, \ldots \qquad (d_1 > 0)$$

deren jedes Glied auch ein Glied der Progression (21.) *ist, und eine natürliche ganze Zahl* m *finden, so daß*

$$\Phi(a_1 + t d_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$$

wird für $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ist jedes Glied von (22.) in (21.) enthalten, so existieren zwei verschiedene nicht negative rationale ganze Zahlen u und v, so daß

$$a_1 = a + ud, \qquad a_1 + d_1 = a + vd,$$

also

$$d_1 = (v-u)\,d,$$

d. h. ein Multiplum von d wird. Ich werde die Progression (22.) kurz als eine „Teilprogression" der arithmetischen Progression (21.) bezeichnen.

Die k Zahlen

$$\omega_1^d, \omega_2^d, \dots \omega_k^d$$

sind alle voneinander verschieden, denn wäre $\omega_i^d = \omega_j^d$, so wäre $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ eine d-te Einheitswurzel. Daraus folgt, wie den Ausführungen unter 3 zu entnehmen ist, daß die Funktion

$$\Phi(a+xd) = \omega_1^a P_1(a+xd)\,\omega_1^{dx} + \cdots + \omega_k^a P_k(a+xd)\,\omega_k^{dx}$$

nicht für jeden Wert $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ verschwinden kann. Es sei also

$$\Phi(a+ud) \not\equiv 0.$$

Ich setze

$$a+ud = a_1.$$

Es sei $\mathfrak{p}^{m-1}$ die höchste Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$ ($m \geqq 1$), die in der dem Körper K angehörigen ganzen Zahl $\Phi(a_1)$ aufgeht, so daß

$$\Phi(a_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}.$$

Ich setze

$$d_1 = d\,N(\mathfrak{p}^m)\,\varphi(\mathfrak{p}^m),$$

wo $N(\mathfrak{p}^m)$ die Norm von $\mathfrak{p}^m$ und

$$\varphi(\mathfrak{p}^m) = N(\mathfrak{p}^m)\Big(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\Big)$$

bedeutet.

Man gebe der Variablen t die Werte $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Es ist

$$P_i(a_1 + td_1) \equiv P_i(a_1) \pmod{\mathfrak{p}^m},$$

da td_1 teilbar durch $N(\mathfrak{p}^m)$, also durch $\mathfrak{p}^m$ ist. Es ist ferner

$$\omega_i^{a_1+td_1} \equiv \omega_i^{a_1} \pmod{\mathfrak{p}^m},$$

da td_1 teilbar durch $\varphi(\mathfrak{p}^m)$ und, nach Voraussetzung,

$$\omega_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Daher ist

$$\Phi(a_1 + td_1) \equiv \Phi(a_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m},$$

w. z. b. w.

7. Nun ist ersichtlich, wie der Beweis für Satz II′, für den Hauptsatz dieser Arbeit, zu führen ist.

Es sei K ein Körper, etwa der kleinste Körper, der alle in (3.) auftretenden ganzen Zahlen, also alle Koeffizienten von $P_1(x), P_2(x), \dots P_r(x)$

und die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ enthält. Es sei angenommen, daß in den von Null verschiedenen unter den Zahlen

$$F(0), F(1), F(2), \dots F(n), \dots$$

nur endlich viele Primideale von K, nämlich die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_t$ aufgehen.

Die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ können, auf Grund der Ausführungen unter 5., als teilerfremd vorausgesetzt werden. Sie verteilen sich, mod. $\mathfrak{p}_j$ betrachtet, in zwei Klassen: erstens diejenigen, die durch $\mathfrak{p}_j$ teilbar sind, und zweitens diejenigen, die durch $\mathfrak{p}_j$ nicht teilbar sind. Die erste Klasse kann leer sein, aber die zweite Klasse muß einige der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ enthalten, sagen wir die Zahlen $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots \omega_{i_k}$. Ich setze

$$\Phi_j(x) = P_{i_1}(x)\,\omega_{i_1}^x + P_{i_2}(x)\,\omega_{i_2}^x + \cdots + P_{i_k}(x)\,\omega_{i_k}^x .$$

Die Funktion $\Phi_j(x)$ genügt in bezug auf $\mathfrak{p}_j$ den dem Hilfssatze V vorausgeschickten Bedingungen. — Ist die natürliche Zahl $x \geqq m$, so ist

$$F(x) \equiv \Phi_j(x) \pmod{\mathfrak{p}_j^m}.$$

Ich bezeichne mit $s - r$ die Summe der Grade aller Polynome $P_1(x), P_2(x), \dots P_r(x)$. Anders gesagt, s ist der Grad des Nenners der rationalen Funktion

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n .$$

Gemäß Hilfssatz V greife man aus der arithmetischen Progression

$$0, s, 2s, 3s, \dots ns, \dots$$

eine Teilprogression

$$a_1,\ a_1 + d_1,\ a_1 + 2d_1,\ a_1 + 3d_1, \dots$$

heraus, und man bestimme die natürliche ganze Zahl m_1, so daß

$$\Phi_1(a_1 + td_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{m_1}},$$

wobei der Variablen t, wie immer im folgenden, die Werte $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ zuerteilt werden.

Man greife aus der arithmetischen Progression

$$a_1,\ a_1 + d_1,\ a_1 + 2d_1,\ a_1 + 3d_1, \dots$$

eine Teilprogression

$$a_2,\ a_2 + d_2,\ a_2 + 2d_2,\ a_2 + 3d_2, \dots$$

heraus, und man bestimme m_2 so, daß

$$\Phi_2(a_2 + d_2 t) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_2^{m_2}}$$

usf.

Nach l Schritten hat man eine arithmetische Progression

(23.) $$a_l,\ a_l + d_l,\ a_l + 2d_l,\ a_l + 3d_l, \ldots$$

und l ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_l$ von folgenden Eigenschaften bestimmt:

Die Progression (23.) ist als Teilprogression in der arithmetischen Progression

$$0, s, 2s, 3s, 4s, \ldots$$

enthalten.

Es ist

$$\Phi_j(a_l + td_l) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_j^{m_j}}$$
$$(t = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots l).$$

Ist $a_l + td_l$ größer als die größte der Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_l$, so ist

(24.) $$F(a_l + td_l) \equiv \Phi_j(a_l + td_l) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_j^{m_j}}.$$

Es seien nun

$$p_1, p_2, \ldots p_l$$

die natürlichen Primzahlen, die bzw. unter den Zahlen der Primideale

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_l$$

enthalten sind. $p_1, p_2, \ldots p_l$ brauchen nicht alle verschieden zu sein. Ist x eine natürliche ganze Zahl, so ist $F(x)$ bloß aus den Primfaktoren $p_1, p_2, \ldots p_l$ zusammengesetzt. Es folgt aus (24.), daß

(25.) $$F(a_l + td_l) \not\equiv 0 \pmod{p_j^{m_j}}.$$

Die linke Seite von (25.) soll aber außer $p_1, p_2, \ldots p_l$ durch keine Primzahl teilbar sein, also folgt aus (25.)

$$|F(a_l + td_l)| \leqq p_1^{m_1 - 1} p_2^{m_2 - 1} \ldots p_l^{m_l - 1}.$$

Ich setze der Kürze halber

$$a_l = A, d_l = D.$$

Unser Resultat lautet also: Die unendliche Folge

$$F(A),\ F(A + D),\ F(A + 2D),\ F(A + 3D), \ldots$$

ist beschränkt.

Durch das beschriebene Verfahren greife man aus der arithmetischen Progression

$$1 + A,\ 1 + A + D,\ 1 + A + 2D,\ 1 + A + 3D, \ldots$$

eine Teilprogression

$$1 + A',\ 1 + A' + D',\ 1 + A' + 2D',\ 1 + A' + 3D', \ldots$$

heraus, von der Eigenschaft, daß auch die Folge

$$F(1 + A'),\ F(1 + A' + D'),\ F(1 + A' + 2D'), \ldots$$

beschränkt ist. Und so gelangt man nach insgesamt s Schritten (oder in kleinere Schritte zerlegt, nach insgesamt ls Schritten) zu s unendlichen arithmetischen Progressionen

$$\begin{array}{lll} A^{(s-1)}, & A^{(s-1)}+D^{(s-1)}, & A^{(s-1)}+2D^{(s-1)}, \dots \\ 1+A^{(s-1)}, & 1+A^{(s-1)}+D^{(s-1)}, & 1+A^{(s-1)}+2D^{(s-1)}, \dots \\ \dots\dots\dots\

(a, b rational) oder von der Form

$$\frac{a}{1-bz^2}+\frac{a'z}{1-b'z^2} \tag{28.}$$

(a, a' rational, b, b' rational und positiv), oder es unterscheidet sich von einer der beiden Funktionen (27.) (28.) nur um ein additives Polynom.

Die Anwendung des Satzes II′ (es genügt schon II″) auf die Funktion

$$F(x)=2^{n!x}-m$$

ergibt den Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen, für welche eine vorgegebene Zahl m n-ter Potenzrest ist. Letzterer Satz folgt übrigens auch aus der Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen.

Es drängt sich die Frage auf, ob die rationalkoeffizientigen Potenzreihenentwicklungen algebraischer Funktionen stets unendlich viele Primfaktoren enthalten oder nicht. Für die Binomialreihen mit rationalen gebrochenen Exponenten ist die Frage schnell geklärt: In den Zählern gehen unendlich viele Primzahlen auf, nämlich alle Primzahlen mit Ausnahme derjenigen endlich vielen, die in den Nennern aufgehen. Die allgemeine Frage anzufassen scheint keine leichte Aufgabe zu sein.

(Abgeschlossen im Dezember 1915.)

Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. II.

Von Herrn *Paul Epstein* in Frankfurt a. M.

Die im ersten Teil dieser Arbeit (dieses Journal Bd. 149, im folgenden kurz mit I bezeichnet) entwickelte Theorie der Elementarkettenbrüche hat zu einer Einteilung der unimodularen ganzzahligen Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ in *grade* und *ungrade* Substitutionen geführt, die als vollständig gleichberechtigt zu der üblichen Einteilung in eigentliche und uneigentliche Substitutionen anzusehen ist. Diese doppelte Einteilung ermöglicht es, die drei Untergruppen vom Index 2 der Gruppe aller unimodularen ganzzahligen Substitutionen in einfacher Weise zu charakterisieren, nämlich

Gruppe $\mathfrak{A}$ der eigentlichen Substitutionen (Modulgruppe)
„ $\mathfrak{B}$ „ graden „
„ $\mathfrak{C}$ „ eigentlichen graden und uneigentlichen ungraden Substitutionen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der klassischen Theorie der Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen innerhalb der Gruppe $\mathfrak{A}$ die entsprechende *Reduktionstheorie im Gebiete der Gruppe* $\mathfrak{B}$ an die Seite gestellt. Sie ist gleichbedeutend mit der Theorie der *periodischen Elementarkettenbrüche.* Der Einteilung der Formen in Klassen entspricht hier eine Einteilung in „Stämme“ als Gesamtheiten von

Formen, die mit einander grade-äquivalent sind. Den entgegengesetzten Klassen entsprechen die reziproken Stämme, den ambigen Klassen die involutorischen Stämme. Es mag hier nur angedeutet sein, daß die Einführung des *Index* der quadratischen Form eine einheitliche Behandlung der Reduktionstheorie für alle drei Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ermöglicht.

Die Reduktion der *definiten* quadratischen Formen im Bereich der Gruppe $\mathfrak{B}$ bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, würde aber außerhalb des Rahmens dieser Arbeit fallen. Sie wird am einfachsten mit Hilfe des Fundamentalbereichs der Gruppe erledigt. Die entsprechende Aufgabe für die *Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe*, welche eine gemeinsame Untergruppe der drei Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bildet, hat *Kronecker**) durchgeführt. Er bezeichnet zwei Formen, die durch eine Substitution dieser Untergruppe ineinander transformiert werden können, als *vollständig* äquivalent. Vom gruppentheoretischen Standpunkt aus dürfte es gerechtfertigt erscheinen, diese Bezeichnung für die Äquivalenz innerhalb der *größten* gemeinsamen Untergruppe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, d. i. die Gruppe der *eigentlichen graden* Substitutionen vorzubehalten.

§ 1. Einer binären quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)$$

mit positiver nicht quadratischer Determinante

$$D = b^2 - ac$$

und ganzzahligen Koeffizienten a, b, c ordnen wir *eine* der beiden quadratischen Irrationalzahlen

$$\frac{\sqrt{D} - b}{a} \text{ oder } \frac{-\sqrt{D} - b}{a}$$

zu und bezeichnen dementsprechend die Form durch

$$(a, b, c)_+ \text{ oder } (a, b, c)_-,$$

so daß also der Form $(a, b, c)_\varepsilon$ die Irrationalzahl

---

*) *Kronecker*, Über bilineare Formen mit vier Variabeln. Werke Bd. 2, S. 435. Vgl. *Stephen Smith*, Sur les équations modulaires. Werke Bd. 2.

$$(1.) \qquad \omega = \frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{a}$$

eindeutig zugeordnet ist. Das Zeichen $\varepsilon = \pm 1$ heiße der *Index* der Form und der zugeordneten Irrationalzahl*). Die mit ω konjugierte Zahl $\frac{-\varepsilon\sqrt{D} - b}{a}$ werde mit ω' bezeichnet.

Den Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ entspricht dieselbe Irrationalzahl ω. Unterscheidet man aber $\frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{a}$ und $\frac{-\varepsilon\sqrt{D} + b}{-a}$, wobei $b^2 - D \equiv 0 \bmod a$ ist, als zwei verschiedene „Formen" derselben Irrationalzahl ω, so entspricht einer gegebenen Irrationalzahl auch nur eine bestimmte quadratische Form.

Die Form $(a, b, c)_\varepsilon$ heißt eine *Form I. Art*, wenn die zugeordnete Irrationalzahl $\omega > 1$ ist. Andernfalls, wenn $\omega < 1$ ist, heißt $(a, b, c)_\varepsilon$ eine *Form II. Art.* Es ergeben sich leicht als Kennzeichen für jede der beiden Arten:

$$(2.) \qquad \begin{array}{lll} \text{Ist } a > 0 \text{ und } a + b \leqq \varepsilon\sqrt{D}, & \text{so ist } (a, b, c)_\varepsilon \text{ von der} & \begin{array}{l}\text{I. Art.}\\ \text{II. }\,,,\end{array} \\ ,, \quad a < 0 \quad ,, \quad a + b \geqq \varepsilon\sqrt{D}, & ,, \quad ,, \quad (a, b, c)_\varepsilon \quad ,, \quad ,, & \begin{array}{l}\text{I. Art.}\\ \text{II. }\,,,\end{array} \end{array}$$

So ist z. B. $(5, -7, 4)_+$ mit $D = 29$ eine Form I. Art, dagegen $(5, -7, 4)_-$ eine Form II. Art.

Auf die einer Form $(a, b, c)_\varepsilon$ zugeordnete Irrationalzahl ω wenden wir den in I, § 3 angegebenen Algorithmus an und bilden die Reihe der Irrationalzahlen

$$\omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|}, \quad \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|}, \quad \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \cdots$$

Ihnen entspricht eine nicht abbrechende *Kette von abgeleiteten Formen* $(a_i, b_i, c_i)_{\varepsilon_i}$, die durch lineare Transformation aus der Form $(a, b, c)_\varepsilon$ hervorgehen.

---

*) Es bedeuten also $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(a, b, c)_{-\varepsilon}$ zwei verschiedene Formen oder, wenn man will, die beiden „Zweige" derselben Form. Ihre zugeordneten Irrationalzahlen sind konjugiert, deshalb heißen auch die Formen konjugiert.

Ist $\omega > 1$, also $(a, b, c)_\varepsilon$ eine Form I. Art, so ist $\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1}$. Dies entspricht einer Transformation $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ der Form $(a, b, c)_\varepsilon$, und es ist für die abgeleitete Form

(3.) $$a_1 = a + 2b + c, \quad b_1 = a + b, \quad c_1 = a.$$

Zur Bestimmung des Index ε_1 hat man

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1} = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{D} - a - b} = \frac{-\varepsilon\sqrt{D} - (a+b)}{a + 2b + c} = \frac{\varepsilon_1\sqrt{D} - b_1}{a_1},$$

also ist

(4.) $$\varepsilon_1 = -\varepsilon.$$

Ist $\omega < 1$, also $(a, b, c)_\varepsilon$ eine Form II. Art, so ist $\omega_1 = \frac{1}{1 - \omega}$, entsprechend einer Transformation $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ von $(a, b, c)_\varepsilon$. Es wird also für die abgeleitete Form

(5.) $$a_1 = a + 2b + c, \quad b_1 = -(a + b), \quad c_1 = a,$$

und da $\omega_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{D} + a + b}{a + 2b + c} = \frac{\varepsilon_1\sqrt{D} - b_1}{a_1}$ ist, so ist der Index

(6.) $$\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Ist hier ω positiv, so ist $\omega_1 > 1$, also $(a_1, b_1, c_1)_{\varepsilon_1}$ eine Form I. Art. Ist aber ω negativ, so ist $0 < \omega_1 < 1$, also $(a_1, b_1, c_1)_{\varepsilon_1}$ eine Form II. Art und die daraus abgeleitete Form $(a_2, b_2, c_2)_{\varepsilon_2}$ eine Form I. Art. Wir wollen, wenn nichts anderes bemerkt ist, immer ω als *positiv* voraussetzen. *Dann folgen niemals zwei Formen II. Art aufeinander*, und wir haben den Satz:

1. *Auf eine Form I. Art folgt immer mittels der Formeln* (3.) *eine Form I. oder II. Art von entgegengesetztem Index, auf eine Form II. Art folgt mittels der Formeln* (5.) *immer eine Form I. Art von gleichem Index.*

Infolgedessen läßt sich die Kette der abgeleiteten Formen in einzelne *Abschnitte* zerlegen. Jeder Abschnitt besteht aus einer oder mehreren Formen I. Art und *einer* Form II. Art, mit welcher er endigt.

Nur wenn die Ausgangsform $(a, b, c)_\varepsilon$ schon eine Form II. Art ist, bildet sie allein den ersten Abschnitt. Sonst bestehen sämtliche Abschnitte aus mindestens zwei Formen*). Die Formen in einem Abschnitt haben abwechselnd positiven und negativen Index, die erste Form im Abschnitt, die wir die *Leitform* nennen wollen, hat den gleichen Index wie die letzte des vorangehenden Abschnitts. Die übrigen Formen des Abschnitts heißen *Zwischenformen.*

Irgend zwei Formen der Kette sind durch eine *grade* Substitution**) mit einander verknüpft, sie heißen *grade-äquivalent.* Da die Fundamentalsubstitution U eine uneigentliche, V eine eigentliche Substitution ist, so sind *zwei Formen der Kette mit gleichem Index eigentlich äquivalent, zwei Formen mit verschiedenem Index uneigentlich äquivalent.*

In der Kette der aus $(a, b, c)_\varepsilon$ abgeleiteten Formen mögen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Anzahlen der Formen in den einzelnen Abschnitten sein. *Dann besteht nach* I, § 3 *für die der Form* $(a, b, c)_\varepsilon$ *zugeordnete Irrationalzahl die Elementarkettenbruchentwicklung*

$$\omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}. \tag{7.}$$

Sind $\frac{x_i}{y_i}$ die Näherungsbrüche dieses $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. $\left(\frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{0}, \frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{1}\right)$, so ist

$$\begin{pmatrix} x_i \pm x_{i-1} \\ y_i \pm y_{i-1} \end{pmatrix}$$

die Substitution, die die Form (a, b, c) in die Form (a_i, b_i, c_i) der Kette überführt. Darin ist in der zweiten Spalte das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem (a_i, b_i, c_i) eine Zwischenform oder eine Leitform ist.

Die Indizes der Zwischenformen unter Beibehaltung des allerersten Index und der Einteilung in Abschnitte sind offenbar entweder identisch mit der *Indexkette****) des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. (7.) — sobald nämlich die Ausgangsform $(a, b, c)_\varepsilon$ negativen Index hat — oder sie werden zur Indexkette, wenn man jeden Index umkehrt. Man hat also nach den Entwicklungen in

---

*) Ist ω negativ, so bestehen die ersten beiden Abschnitte aus je einer Form II. Art.

**) Vgl. I, § 4.

***) Vgl. I, § 2.

I, § 2 durch die Indizes der Formen auch ohne weiteres die Charakteristik und damit die *gewöhnliche* Kettenbruchentwicklung von ω.

1. Beispiel. Wir gehen von der Form $(62, -95, 145)_-$ aus. Ihre Determinante ist $D = 35$, die zugeordnete Irrationalzahl

$$\omega = \frac{-\sqrt{35} + 95}{62} > 1,$$

also die Form von der I. Art. Wir bilden die Kette der abgeleiteten Formen, indem wir jedesmal nach (2.) oder direkt durch Betrachtung der zugeordneten Irrationalzahl die Art der Form bestimmen und dann die Formeln (3.) oder (5.) anwenden:

$$\begin{array}{l}
(\ 62, -95,\ 145)_- \\
(\ 17, -33,\ 62)_+ \\
(\ 13, -16,\ 17)_- \\
\hline
(-\ 2,\ \ 3,\ 13)_- \\
(\ 17,\ \ 1, -\ 2)_+ \\
\hline
(\ 17, -18,\ 17)_+ \\
(-\ 2, -\ 1,\ 17)_- \\
(\ 13, -\ 3, -\ 2)_+ \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\ \ 5, -10,\ \ 13)_+ \\
(-\ 2, -\ 5,\ \ \ 5)_- \\
\hline
(-\ 7,\ \ \ 7, -\ 2)_- \\
(\ \ 5,\ \ \ 0, -\ 7)_+ \\
(-\ 2,\ \ \ 5,\ \ \ 5)_- \\
(\ 13,\ \ \ 3, -\ 2)_+ \\
\hline
(\ 17, -16,\ \ 13)_+ \\
(-\ 2,\ \ \ 1,\ \ 17)_- \\
(\ 17, -\ \ 1, -\ 2)_+ \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\ 13, -16,\ \ 17)_+ \\
(-\ 2, -\ 3,\ \ 13)_- \\
(\ \ 5, -\ 5, -\ 2)_+ \\
(-\ 7,\ \ \ 0,\ \ \ 5)_- \\
\hline
(-\ 2,\ \ \ 7, -\ 7)_- \\
(\ \ 5,\ \ \ 5, -\ 2)_+ \\
\hline
(\ 13, -10,\ \ \ 5)_+ \\
(-\ 2,\ \ \ 3,\ \ 13)_- \\
(\ 17,\ \ \ 1, -\ 2)_+ \\
\hline
\end{array}$$

Die beiden letzten Formen stimmen mit den beiden Formen im zweiten Abschnitt überein, also wiederholen sich von hier ab die Formen, *die Kette ist periodisch* und wir haben für ω den *periodischen* $\mathfrak{CK}$.

$$\frac{-\sqrt{35} + 95}{62} = \mathfrak{C}\{3, 2, \overline{3, 2, 4, 3, 4, 2, 3}, \ldots\}.$$

Aus der Indexkette ergibt sich die Charakteristik

$$-++---+\ +------+\ +------+\ +------\ \text{usw.},$$

also ist der gewöhnliche Kettenbruch für ω:

$$[1, 2, 3, \overline{2, 5}, \ldots].$$

Würden wir die Periode bereits mit dem zweiten Abschnitt beginnen lassen, so würde ihr Ende in den zuletzt hingeschriebenen Abschnitt hineinfallen, so daß immer das erste Element desselben zu einer Periode,

die beiden andern zur nächsten Periode gehören würden. Wir verschieben deshalb den Beginn der Periode bis zu einem Abschnitt, der in der Kette vollständig wiederkehrt, so daß also die Periode immer aus vollständigen Abschnitten besteht.

Die aus den Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ abgeleiteten Ketten haben offenbar dieselbe Gliederung. Es wird also nicht nur, sobald eine Form $(a, b, c)_\varepsilon$ sich wiederholt, eine Kette als periodisch erkannt, sondern auch, sobald in der Kette die Form $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ auftritt.

2. Beispiel. Die Form $(330, -767, 1782)_+$ mit der Determinante $D = 229$ ist von der ersten Art. Die Kette der abgeleiteten Formen ist

$(330, -767, 1782)_+$	$(150, -223, 330)_+$	$(-22, 19, -6)_-$
$(578, -437, 330)_-$	$(34, -73, 150)_-$	$(10, -3, -22)_+$
$(34, -141, 578)_-$	$(38, -39, 34)_+$	$(-18, 7, 10)_-$
$(330, -107, 34)_+$	$(-6, -1, 38)_-$	$(6, -11, -18)_+$
	$(30, -7, -6)_+$	$(-34, -5, 6)_-$
	$(10, -23, 30)_+$	$(-38, 39, -34)_-$
	$(-6, -13, 10)_-$	$\vdots$

Die letzte Form entspricht der dritten Form des dritten Abschnitts. Man erhält also den periodischen $\mathfrak{EK}$.

$$\omega = \frac{\sqrt{229} + 767}{330} = \mathfrak{E}\,|2, 2, 5, \overline{2, 5, 3}, \ldots|.$$

Der gewöhnliche Kettenbruch für ω wird

$$\omega = [2, 2, 1, 2, \overline{2, 1, 4}, \ldots].$$

Zwei solche Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ mögen *symmetrische Formen* heißen; ihre zugehörigen Ketten bestehen aus paarweise symmetrischen Formen und haben gleiche Gliederung. Sie sind im allgemeinen verschieden und heißen dann *symmetrische Ketten.* Wenn, wie im obigen Beispiel, je zwei symmetrische Formen derselben Kette angehören, so heißt die Kette *in sich symmetrisch.* Es wird später zu untersuchen sein, unter welcher Bedingung dies eintritt (s. u. Satz 23).

§ 2. Wir unterscheiden *zwei Arten von reduzierten Formen.*

Eine Form $(a, b, c)_\varepsilon$, bei der

(8.) $$\omega > 1 \text{ und } 0 < \omega' < 1$$

ist, heißt eine *reduzierte Leitform.*

Eine Form $(a, b, c)_\varepsilon$, bei der

(9.) $$\omega > 0 \text{ und } \omega' < 0$$

ist, heißt eine *reduzierte Zwischenform.*

Für jede reduzierte Form ist also

$$\omega - \omega' = \frac{2\varepsilon\sqrt{D}}{a} > 0,$$

folglich

(10.) $$a\varepsilon > 0,$$

d. h.:

2. *Bei jeder reduzierten Form stimmt das Vorzeichen von a mit dem Index überein.*

Für eine *reduzierte Leitform* ist

$$\omega + \omega' = -\frac{2b}{a} > 0, \qquad \omega\omega' = \frac{c}{a} > 0,$$

also haben *a und b verschiedene Vorzeichen, a und c gleiche Vorzeichen,* folglich ist $b^2 = D + ac > D$ und

(11.) $$|b| > \sqrt{D}.$$

Ferner ist nach (8.)

$$0 < \frac{-\varepsilon\sqrt{D} - b}{a} < 1 < \frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{a},$$

mithin, da $a\varepsilon$ positiv ist,

$$0 < -\sqrt{D} - b\varepsilon < a\varepsilon < \sqrt{D} - b\varepsilon,$$

und hieraus folgt

(12ª.) $$-\sqrt{D} < a + b < \sqrt{D}.$$

Mit $(a, b, c)_\varepsilon$ ist auch gleichzeitig $(c, b, a)_\varepsilon$ eine reduzierte Leitform, denn es gehören zu ihr die Wurzeln $\overline{\omega} = \frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{c} = \frac{a}{c}\omega = \frac{1}{\omega'} > 1$ und $\overline{\omega}' = \frac{1}{\omega} < 1$, aber positiv, folglich ist auch

(12ᵇ.) $$-\sqrt{D} < b + c < \sqrt{D}.$$

Aus (12^a.) und (12^b.) ergibt sich

(13.) $$-2\sqrt{D} < a - c < 2\sqrt{D}$$

und weiter durch Addition von (12^a.) und (12^b.) und Quadrieren von (12^a.) mit Rücksicht auf (10.)

(14.) $$-2\sqrt{D} < \varepsilon(a + 2b + c) < 0.$$

Da $D - b^2$, also auch $D - (a+b)^2$ durch a teilbar ist, so ist

(15.) $$|a| \leqq |D - (a+b)^2|,$$

also, da $D - (a+b)^2$ positiv ist:

$$|a| \leqq D$$

und ebenso

$$|c| \leqq D.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nicht gleichzeitig bestehen, denn ist $a = D$, so muß nach (15.) $a + b = 0$, also $b = -D$ sein, und dann folgt $c = D - 1$. Es ist also immer $ac < D^2$, also $b^2 < D^2 + D$, und hieraus ergibt sich

$$|b| \leqq D.$$

Wir haben damit den Satz:

3. *Bei jeder reduzierten Leitform ist*

(16.) $$|a| \leqq D, \quad \sqrt{D} < |b| \leqq D, \quad |c| \leqq D.$$

Nimmt man zu diesen Ungleichungen noch eine der Ungleichungen (12.), (13.), (14.) hinzu, so ist jede Form, deren Koeffizienten diese Ungleichungen befriedigen, wenn nur a und c gleiche, a und b verschiedene Vorzeichen haben, eine reduzierte Leitform. Noch einfacher ist eine reduzierte Leitform durch folgenden Satz gekennzeichnet:

4. *Sind a und c positiv und ist $a + 2b + c$ negativ (mithin auch b negativ), so ist (a, b, c) eine reduzierte Leitform von positivem Index*).*

Beweis. Es ist $ac = b^2 - D > 0$, also $0 < -\sqrt{D} - b$ und daher $0 < \omega'$. Ferner ist $a(a + 2b + c) = (a+b)^2 - D < 0$, also $-\sqrt{D} < a + b < \sqrt{D}$ und $-\sqrt{D} - b < a < \sqrt{D} - b$, folglich $\omega' < 1 < \omega$.

---

*) Der Satz ergibt sich auch sofort durch Betrachtung der Funktion $f(t) = at^2 + 2bt + c$, da $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{t^2} > 0$ sein soll.

Ebenso ist eine Form mit negativen a und c und positivem Wert von $a+2b+c$ eine reduzierte Leitform von negativem Index.

Vor allem ergibt sich aus (16.):

5. *Es gibt nur eine endliche Anzahl von reduzierten Leitformen der Determinante D.*

Um sie alle aufzustellen, nimmt man zunächst für b die *negativen* der Ungleichung (16.) entsprechenden Zahlen und zerlegt jedesmal b^2-D auf alle möglichen Arten in zwei positive Faktoren a und c, so daß immer $a+2b+c<0$ wird. So erhält man die reduzierten Leitformen $(a,b,c)_+$, und einer jeden entspricht eine Leitform $(-a,-b,-c)_-$.

So erhält man z. B. für $D=15$ die folgenden reduzierten Leitformen von positivem Index:

$(1,-4,1)$
$(2,-5,5)\ (5,-5,2)$
$(3,-6,7)\ (7,-8,7)\ (7,-6,3)$
$(6,-9,11)\ (11,-13,14)\ (14,-15,15)\ (15,-15,14)\ (14,-13,11)\ (11,-9,6).$

Diese bilden, wie man sieht, vier Perioden von benachbarten Formen*).

Für die abgeleitete Form einer reduzierten Leitform ist $\omega_1=\frac{1}{\omega-1}>0$ und $\omega_1'=\frac{1}{\omega'-1}<0$, also:

6. *Auf eine reduzierte Leitform folgt immer eine reduzierte Zwischenform.*

---

*) Man kann allein auf die reduzierten Leitformen mit positivem Index eine Reduktionstheorie innerhalb der Gruppe $\mathfrak{A}$ der eigentlichen Substitutionen gründen. Es treten darin *Möbius*sche Kettenbrüche von der Art

$$\mathfrak{M}(k_1,k_2,k_3\ldots)=k_1-\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}-\cdots$$

auf, worin alle $k_i\geqq 2$ sind. Ist $(a_1,b_1,a_2)\,(a_2,b_2,a_3)\ldots\ (a_n,b_n,a_1)$ eine Periode benachbarter reduzierter Formen, so ist $k_i=-\frac{b_i+b_{i+1}}{a_{i+1}}$, und für die größere Lösung $\tau=\frac{\sqrt{D}-b_1}{a_2}$ der Gleichung $a_1+2b_1\tau+a_2\tau^2=0$ erhält man den rein periodischen Kettenbruch

$$\tau=\mathfrak{M}(\overline{k_1,k_2,\ldots k_n},\ldots).$$

Bei einer solchen Form ist $\omega\omega' = \frac{c}{a} < 0$, also haben *a und c verschiedene Vorzeichen*, und dies zusammen mit Satz 2 ist notwendige und hinreichende Bedingung für eine reduzierte Zwischenform.

Es ist also

$$b^2 = D + ac < D,$$

folglich

$$|b| < \sqrt{D}. \tag{17.}$$

Hieraus folgt, daß es auch nur *eine endliche Anzahl von reduzierten Zwischenformen der Determinante D gibt.*

Ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine *reduzierte Zwischenform I. Art*, also $\omega > 1$, so ist für die abgeleitete Form $\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1} > 0$, $\omega_1' = \frac{1}{\omega' - 1} < 0$, also:

7. *Auf eine reduzierte Zwischenform I. Art folgt wieder eine reduzierte Zwischenform.*

Dies setzt sich fort, bis eine reduzierte Zwischenform II. Art auftritt. Dann ist $\omega' < 0 < \omega < 1$, also für die abgeleitete Form $\omega_1 = \frac{1}{1 - \omega} > 1$, $\omega_1' = \frac{1}{1 - \omega'} < 1$, aber positiv, also:

8. *Auf eine reduzierte Zwischenform II. Art folgt eine reduzierte Leitform.*

Sobald also in einer Kette abgeleiteter Formen eine reduzierte Form erscheint, sind alle folgenden Formen reduziert. Es gilt nun der folgende Satz, der die Umkehrung von Satz 2 darstellt:

9. *Wenn für zwei aufeinanderfolgende Formen in demselben Abschnitt das Vorzeichen des ersten Koeffizienten mit dem Index übereinstimmt, so sind die Formen reduziert.*

Beweis. Die den Formen zugeordneten Irrationalzahlen sind

$$\omega = \frac{\sqrt{D} - b\varepsilon}{a\varepsilon}, \qquad \omega_1 = \frac{\sqrt{D} - b_1\varepsilon_1}{a_1\varepsilon_1}.$$

Die Form $(a, b, c)_\varepsilon$ ist jedenfalls von der ersten Art, also ist $\varepsilon_1 = -\varepsilon$ und $b_1 = a + b$, folglich

$$\sqrt{D} - b_1\varepsilon_1 = \sqrt{D} + \varepsilon b + \varepsilon a = -a\varepsilon\omega' + a\varepsilon$$

und

$$\omega_1 = \frac{a\varepsilon}{a_1\varepsilon_1}(1 - \omega').$$

Da nun ω_1 positiv ist und nach Voraussetzung auch $a\varepsilon$ und $a_1\varepsilon_1$ positiv sein sollen, so muß $\omega' < 1$ sein. Da aber zugleich $\omega > 1$ ist, so ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Form.

Mit Hilfe dieses Satzes erkennt man bei der Bildung der Kette ohne weiteres das Auftreten einer reduzierten Form, und dann braucht man die Kennzeichen (2.) nicht mehr, um im weiteren Verlauf der Kette zu sehen, von welcher Art die Formen sind und wo ein Abschnitt zu Ende ist. Innerhalb eines Abschnitts haben die ersten Koeffizienten abwechselnde Vorzeichen. Sobald dieses Vorzeichen bei zwei aufeinanderfolgenden Formen dasselbe bleibt, ist die erste dieser Formen eine reduzierte Zwischenform II. Art und schließt den Abschnitt. (Vergleiche die obigen Beispiele.)

Eine Kette von reduzierten Formen ist aber nicht nur nach vorwärts, sondern auch nach rückwärts eindeutig bestimmt, d. h. es gibt zu einer Form $(a, b, c)_\varepsilon$ der Kette nur eine bestimmte *reduzierte* Form $(a', b', c')_{\varepsilon'}$, die ihr vorangeht. Ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Leitform, so ist

$$a' = c, \quad b' = -b - c, \quad c' = a + 2b + c \text{ und } \varepsilon' = \varepsilon.$$

Ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Zwischenform, so ist

$$a' = c, \quad b' = b - c, \quad c' = a - 2b + c \text{ und } \varepsilon' = -\varepsilon.$$

Sobald bei einer so berechneten Form die beiden äußeren Koeffizienten gleiches Vorzeichen erhalten, ist die Form eine reduzierte Leitform, sonst eine reduzierte Zwischenform.

Hieraus und aus der endlichen Anzahl der reduzierten Formen schließt man, daß alle reduzierten Formen einer Kette von der ersten ab in derselben Reihenfolge wiederkehren, d. h. *die Kette ist von da ab periodisch.* Wir lassen die Periode immer mit dem Abschnitt beginnen, der zuerst vollständig wiederkehrt. Ihm können einige reduzierte Formen vorhergehen; diese wiederholen sich im letzten Abschnitt der Periode. Ihre Anzahl ist also sicher nicht größer, als der letzte Abschnitt der Periode.

Es besteht nun der Satz:

10. *Für jede Form $(a, b, c)_\varepsilon$ führt die Kette der abgeleiteten Formen auf eine reduzierte Form.*

Der Beweis gestaltet sich mit Hilfe des Satzes 8 am Schluß von I, § 3 sehr einfach. Wir bezeichnen die Form durch die konjugierten Irrationalzahlen mit $[\omega, \omega']$, worin die erste Zahl immer die der Form zugeordnete Irrationalzahl bedeutet. Ist $\omega < 0$, so sind von der ersten abgeleiteten Form an alle $\omega > 0$, wir können also von vornherein $\omega > 0$ annehmen. Ist dann $\omega' < 0$, so ist bereits $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Zwischenform. Es sei also $\omega > 0$ und $\omega' > 0$. Es liegt dann jede der beiden Zahlen in einem der durch die Näherungsbrüche $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ von $\mathfrak{E}\{\infty\} = t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ begrenzten Intervalle $I_k = \left(\frac{p_k}{p_{k-1}}, \frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}\right)$, und zwar sei

$$\omega \text{ im Intervall } I_m, \ \omega' \text{ im Intervall } I_n.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist $n < m$, so ist nach dem erwähnten Satz $\omega_n > 1$ und $0 < \omega_n' < 1$, also ist $[\omega_n, \omega_n']$ eine *reduzierte Leitform*. Die $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.entwicklung für ω ist dann

$$\omega = \mathfrak{E}\{m+1, \overline{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho}, \ldots\},$$

und es ist darin $\alpha_\varrho = m + 1 - n$. Ist $n = 0$, so ist bereits $[\omega, \omega']$ eine reduzierte Leitform, der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. wird rein periodisch.

b) Ist $n > m$, so ist $0 < \omega_m < 1$, $\omega_m' > 1$. Für die darauf folgende Form ist dann $\omega_{m+1} = \frac{1}{1-\omega_m} > 1$, $\omega_{m+1}' = \frac{1}{1-\omega_m'} < 0$, also ist $[\omega_{m+1}, \omega_{m+1}']$ eine *reduzierte Zwischenform*. Der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für ω hat die Gestalt

$$\omega = \mathfrak{E}\{m+1, i, \overline{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho}, \ldots\},$$

und darin ist $\alpha_\varrho > i$.

c) Sind *ω und ω' im gleichen Intervall*, so liegen für alle Formen des ersten Abschnitts die konjugierten Zahlen in gleichen Intervallen. Ebenso werden in den darauf folgenden Abschnitten je zwei konjugierte Zahlen im gleichen Intervall liegen, sobald dies bei der ersten Form des Abschnitts der Fall ist. Seien dies die k ersten Abschnitte mit $a_1, a_2, \ldots a_k$ Formen, dagegen seien bei der ersten Form des $(k+1)^{\text{ten}}$ Abschnitts die konjugierten Zahlen in verschiedenen Intervallen. Dann beginnt *sowohl für ω, wie für ω'* die $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.entwicklung mit $\mathfrak{E}\{a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots\}$. Hieraus folgt aber, daß die Anzahl k endlich sein muß, sonst wäre $\omega = \omega'$.

Es liegen also schließlich die konjugierten Zahlen in verschiedenen Intervallen, und man hat wieder Fall *a*) oder Fall *b*).

Beispiel. Wir haben oben für die Zahl $\frac{\sqrt{229}+767}{330}$ den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{E}\{2, 2, 5, \overline{2, 5, 3,}\ldots\}$$

gefunden. Daraus schließt man, daß für die vier ersten Formen der Kette je zwei konjugierte Zahlen im gleichen Intervall liegen, dagegen für die erste Form des dritten Abschnitts: $(150, -223, 330)_+$ die Zahl ω im vierten, ω' im zweiten Intervall. In der Tat ist, um nur das letzte zu prüfen:

$$\tfrac{3}{2} < \frac{\sqrt{229}+223}{150} < \tfrac{8}{5} \text{ und } 1 < \frac{-\sqrt{229}+223}{150} < \tfrac{3}{2}.$$

Zusammenfassend haben wir den Satz:

11. *Für jede Form $(a, b, c)_\varepsilon$ wird die Kette der abgeleiteten Formen und der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für die zugehörige quadratische Irrationalität ω schließlich periodisch. Ist die Form eine reduzierte Leitform, also $\omega > 1$ und $0 < \omega' < 1$, so ist der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. rein periodisch. Ist die Form eine reduzierte Zwischenform, also $\omega > 0$, $\omega' < 0$, so geht der Periode nur ein Abschnitt voraus, der kleiner ist, als der letzte Abschnitt der Periode. In allen andern Fällen geht der Periode entweder ein größerer Abschnitt oder mehrere Abschnitte voraus.*

Wie in der Lehre von den gewöhnlichen Kettenbrüchen gilt auch die Umkehrung dieses Satzes und kann mit ähnlichen Hilfsmitteln wie dort bewiesen werden, worauf wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Der periodische Teil der aus $(a, b, c)_\varepsilon$ abgeleiteten Kette möge die *reduzierte Kette* der Form heißen.

In jeder reduzierten Kette gibt es sicher reduzierte Zwischenformen. Man kann aber fragen, ob es auch jedesmal reduzierte Leitformen gibt. Enthält die Kette keine reduzierte Leitform, so enthält sie auch keine reduzierte Zwischenform II. Art. Man sieht sogleich, daß dann alle reduzierten Formen dieselbe zugeordnete Zahl ω haben müssen, und dieses muß die Grenzzahl $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ der Intervalle I_ν sein. Dies ergibt sich auch aus der alsdann bestehenden Gleichung $\omega = \frac{1}{\omega - 1}$. Die zugehörige Form ist $(2, -1, -2)_+$; ihre abgeleitete Form ist die zu ihr symmetrische zum gleichen ω gehörige Form $(-2, 1, 2)_-$, und diese beiden Formen wechseln

in der Kette miteinander ab. Der EK. für die Zahl t ist $\mathfrak{E}\{\infty\}$, und alle mit t durch eine grade Substitution verknüpften Zahlen und nur diese haben diesen EK. als vollständigen Quotienten. Es besteht daher der Satz:

12. *Nur die zur Form* $(2, -1, -2)_+$ *grade-äquivalenten Formen haben die Eigenschaft, daß in ihrer Kette keine reduzierte Leitform auftritt. Die einer solchen Form zugeordnete Irrationalität hat eine EK. entwicklung von der Gestalt*

$$\omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \mu, \infty\}. \tag{18.}$$

Ist $[\omega, \omega'] = (a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Leitform, so ist $\left[\frac{1}{\omega'}, \frac{1}{\omega}\right] = (c, b, a)_\varepsilon$ ebenfalls eine reduzierte Leitform. Der EK. für ω ist rein periodisch; die Periode sei $\{\alpha, \beta, \dots \tau\}$ und der Näherungsbruch bis zum Schluß der Periode sei $\frac{P_i}{Q_i}$. Dann ist nach I, § 2

$$\omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \tau \| \omega\} = \frac{P_i\,\omega - P_{i-1}}{Q_i\,\omega - Q_{i-1}},$$

also

$$\omega' = \frac{P_i\,\omega' - P_{i-1}}{Q_i\,\omega' - Q_{i-1}},$$

oder wenn $\frac{1}{\omega'} = \bar{\omega}$ geschrieben wird:

$$\bar{\omega} = \frac{Q_{i-1}\,\bar{\omega} - Q_i}{P_{i-1}\,\bar{\omega} - P_i}.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung:

$$\bar{\omega} = \frac{P_i\,\bar{\omega} - Q_i}{P_{i-1}\,\bar{\omega} - Q_{i-1}}.$$

Nun ist aber nach I, § 2, Formel (2.):

$$\frac{P_i}{P_{i-1}} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots \beta, \alpha\}; \qquad \frac{Q_i}{Q_{i-1}} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots \beta, \alpha - 1\},$$

folglich ist

$$\bar{\omega} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots \beta, \alpha \| \bar{\omega}\},$$

d. h. $\frac{1}{\omega'}$ *hat die umgekehrte Periode wie* ω. Das gleiche gilt aber für jede quadratische Irrationalzahl ξ. Ist nämlich $(a, b, c)_\varepsilon$ die zugeordnete Form, so gibt es, abgesehen von der in Satz 12 gefundenen Ausnahme, jedenfalls

eine mit ihr grade-äquivalente reduzierte Leitform. Ihre zugeordnete Irrationalzahl sei ω, dann sind ξ und ω durch eine grade Substitution

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \omega = A(\omega)$$

verknüpft, woraus sich zwischen $\bar{\xi} = \frac{1}{\xi}$ und $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$ die Beziehung

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \bar{\omega} = B(\bar{\omega})$$

ergibt. Es ist aber, wenn $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist:

$$B = RAR,$$

also auch B eine grade Substitution, und nun ergibt sich aus Satz 4 in I, § 4, daß die $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. von $\bar{\xi}$ und $\bar{\omega}$ von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen. Gehört aber $(a, b, c)_\varepsilon$ zu den in Satz 12 genannten Formen, so ist ξ grade-äquivalent mit $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{1}{\xi'}$ mit $\frac{1}{t'}$, also auch mit $-\frac{1}{t'}$. Da aber $-\frac{1}{t'} = t$ ist, so haben ξ und $\frac{1}{\xi'}$ $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.entwicklungen von der Form (18.). Allgemein gilt also für jede quadratische Irrationalzahl ω der Satz:

13. *Der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für $\frac{1}{\omega'}$ hat die umgekehrte Periode wie der für ω.*

Ist die Irrationalzahl ω der Form $(a, b, c)_\varepsilon$ zugeordnet, so ist auf Grund der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die reziproke Zahl $\frac{1}{\omega}$ der Form $(c, b, a)_{-\varepsilon}$ zugeordnet. Wir nennen die eine Form die *reziproke Form* der andern, die ihnen zugeordneten reduzierten Ketten mögen *reziproke Ketten* heißen. Ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Leitform, so ist ihre reziproke Form $(c, b, a)_{-\varepsilon}$ keine reduzierte Form, weil ja das Vorzeichen von c nicht mit dem Index übereinstimmt. Dagegen ist die reziproke Form einer reduzierten Zwischenform offenbar wiederum eine reduzierte Zwischenform; sie findet sich also in der reziproken Kette vor, und umgekehrt sind nur in diesem Fall zwei Ketten reziprok. Es besteht mithin der Satz:

14. *Zwei reduzierte Ketten sind dann und nur dann reziprok, wenn die reziproke Form einer Zwischenform der einen Kette in der andern Kette vorkommt. Alsdann sind alle Zwischenformen der einen Kette die reziproken*

Formen der Zwischenformen der andern. Die Anzahl der Zwischenformen ist also in beiden Ketten die gleiche.

Zwei reziproke Formen und überhaupt zwei durch eine ungrade Substitution verknüpfte Formen sind *ungrade-äquivalent.*

§ 3. Auf Grund der Sätze 4 und 5 in I, § 4 kann nun der folgende Satz ausgesprochen werden, der zusammen mit Satz 11 das Hauptergebnis unserer Untersuchung darstellt:

15. *Grade-äquivalente Formen haben dieselbe reduzierte Kette, ungrade-äquivalente Formen haben reziproke reduzierte Ketten.*

Allerdings können wir zunächst nur schließen, da zu *symmetrischen* Formen die gleiche $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Periode gehört, daß zwei grade-äquivalente Formen entweder dieselbe oder symmetrische reduzierte Ketten besitzen (und entsprechend für ungrade-äquivalente Formen), es wird sich aber zeigen, daß der zweite Fall nicht möglich ist (s. u. Satz 21). Um die Darstellung nicht zu unterbrechen, wollen wir zuvor einige wichtige neue Begriffe definieren.

Eine Gesamtheit von Formen, von denen jede mit jeder andern grade-äquivalent ist, nennen wir einen *Stamm.* Jeder Stamm ist durch seine reduzierte Kette charakterisiert. Zwei Stämme mit reziproken reduzierten Ketten heißen reziproke Stämme. Jede Form des einen Stammes ist die reziproke Form einer Form des andern Stammes.

Es kann aber auch eine reduzierte Kette mit ihrer reziproken Kette identisch sein. Eine solche Kette und den ihr entsprechenden Stamm wollen wir *involutorisch* nennen. In einem involutorischen Stamm tritt neben jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon$ die reziproke Form $(c, b, a)_{-\varepsilon}$ auf, und jede Form ist mit jeder andern, also auch mit sich selbst sowohl grade- wie auch ungrade-äquivalent. Es gilt aber auch offenbar das umgekehrte, nämlich:

16. *Eine Form gehört zu einem involutorischen Stamm, wenn es ungrade Substitutionen gibt, die die Form in sich selbst überführen.*

Neben den involutorischen Stämmen wollen wir noch zwei besondere Arten von Stämmen betrachten. Sie treten auf, sobald *zwei konjugierte Formen äquivalent* sind. Konjugierte Formen gehören zu *konjugierten Stämmen*; jede Form des einen Stammes ist die konjugierte Form einer Form des andern Stammes. Sind nun zwei konjugierte Formen äquivalent, so sind ihre Stämme entweder *identisch* oder *reziprok,* je nachdem die Formen grade- oder ungrade-äquivalent sind.

Ein Stamm, der mit seinem konjugierten Stamm identisch ist, heißt *selbstkonjugiert.* In ihm tritt also neben jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon = [\omega, \omega']$ die konjugierte Form $(a, b, c)_{-\varepsilon} = [\omega', \omega]$ auf. Diese Formen können nicht gleichzeitig reduzierte Formen sein. Es ist aber zur Form $[\omega', \omega]$ die Form $[-\omega', -\omega] = (a, -b, c)_\varepsilon$ grade-äquivalent, also gehört auch sie zu dem Stamm, und diese Form ist gleichzeitig mit $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Zwischenform. Es folgt also:

Bei einem selbstkonjugierten Stamm tritt in der reduzierten Kette neben jeder reduzierten Zwischenform $(a, b, c)_\varepsilon$ *auch die Form* $(a, -b, c)_\varepsilon$ *auf.*

Sind *zwei konjugierte Stämme reziprok* und ist $(a, b, c)_\varepsilon = [\omega, \omega']$ irgend eine Form des einen Stammes, so gehört zum *gleichen* Stamm die *Konjugierte der reziproken Form* $(c, b, a)_{-\varepsilon}$, d. h. die Form $(c, b, a)_\varepsilon = \left[\frac{1}{\omega'}, \frac{1}{\omega}\right]$. Diese Form heißt die *Umkehrung* der Form $(a, b, c)_\varepsilon$, und ein Stamm, der zu seinem konjugierten Stamm reziprok ist, heißt *umkehrbar.* Ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Leitform, so ist auch die Umkehrung eine reduzierte Leitform, ist $(a, b, c)_\varepsilon$ eine reduzierte Zwischenform, so ist die zur Umkehrung grade-äquivalente Form $(c, -b, a)_{-\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\omega'}, -\frac{1}{\omega}\right]$ ebenfalls eine reduzierte Zwischenform, also folgt:

Bei einem umkehrbaren Stamm tritt in der reduzierten Kette neben jeder reduzierten Leitform ihre Umkehrung, neben jeder reduzierten Zwischenform $(a, b, c)_\varepsilon$ *die Form* $(c, -b, a)_{-\varepsilon}$ *auf.*

Bezeichnen wir einen Stamm mit $\mathfrak{S}$, seinen reziproken Stamm mit $\mathfrak{S}^{-1}$, den konjugierten Stamm mit $\mathfrak{S}'$, so ist der Stamm $\mathfrak{S}$:

involutorisch, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}$,
selbstkonjugiert, „ $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$,
umkehrbar, „ $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^{-1}$.

Diesen drei besonderen Stämmen entsprechen besondere Eigenschaften der zugehörigen $\mathfrak{EK}$.entwicklungen. Bezeichnen wir kurz die Perioden von zwei reziproken Irrationalzahlen als reziproke Perioden, so ist ohne weiteres klar*):

*) Über die Eigenschaften der involutorischen, selbstkonjugierten und umkehrbaren $\mathfrak{EK}$. vgl. auch meine Arbeit „*Über Möbius-Kettenbrüche und Elementarkettenbrüche*", Math. Zeitschr. Bd. 2, S. 428 ff.

17ª. *Bei einem involutorischen Stamm ist die Periode mit ihrer reziproken Periode identisch.*

Bei einem selbstkonjugierten Stamm ist ω' grade-äquivalent mit ω, mithin auch $\frac{1}{\omega'}$ grade-äquivalent mit $\frac{1}{\omega}$, also folgt nach Satz 13:

17ᵇ. *Bei einem selbstkonjugierten Stamm ist die reziproke Periode die Umkehrung der Periode.*

Bei einem umkehrbaren Stamm ist $\frac{1}{\omega'}$ grade-äquivalent mit ω, also ergibt die Umkehrung der Periode bis auf eine Verschiebung wieder dieselbe Periode, d. h. aber:

17ᶜ. *Bei einem umkehrbaren Stamm besteht die Periode aus einem oder zwei symmetrischen Teilen.*

Für die Perioden der involutorischen und selbstkonjugierten Stämme kann noch eine weitere Eigenschaft festgestellt werden. Es sei für irgendeinen periodischen $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. $\overline{\pi_1, \pi_2, \dots \pi_\mu}$ die Periode; ihre *Länge* ist

$$\lambda = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_\mu,$$

die Anzahl μ der Abschnitte heiße die *Ordnung* der Periode; sie ist gleich der Anzahl der Trennungsstriche in der Indexkette der Periode, wenn man den Trennungsstrich zwischen zwei Perioden immer zur vorangehenden Periode rechnet. Die reziproke Periode habe die Länge λ', die Ordnung μ'. Durch Betrachtung der Indexketten beider Perioden findet man ganz entsprechend wie in I, § 2 die Beziehungen

$$\lambda' - \mu' = \lambda - \mu$$
$$\lambda' = 2\lambda - 3\mu$$
$$\mu' = \lambda - 2\mu.$$

Aus ihnen ergibt sich sofort für die *Anzahlen l und l' der reduzierten Leitformen und die Anzahlen z und z' der reduzierten Zwischenformen in zwei reziproken Stämmen**):*

$$z = z' = l + l'.$$

Bei den involutorischen und den selbstkonjugierten Stämmen ist $\lambda' = \lambda, \mu' = \mu, l' = l$, also folgt:

(19.) $$\lambda = 3\mu, \qquad z = 2l.$$

18. *Bei jedem involutorischen und jedem selbstkonjugierten Stamm ist die Länge der Periode das Dreifache der Ordnung und die Anzahl der*

*) Es ist entweder $l + z = \lambda, l = \mu$ oder (vgl. Satz 19) $l + z = 2\lambda, l = 2\mu$.

reduzierten Zwischenformen doppelt so groß wie die Anzahl der reduzierten Leitformen.

Diese Erscheinung tritt sehr häufig ein, z. B. bei jedem ℭℜ. für eine *Quadratwurzel*, denn die Form $(1, 0, -D)_+$ gehört zu einem selbstkonjugierten Stamm. So ist

$$\sqrt{6} = \mathfrak{C}\{2, \overline{2, 4, 3}, \ldots\}; \qquad \lambda = 9, \ \mu = 3$$

$$\sqrt{7} = \mathfrak{C}\{2, \overline{2, 2, 2, 2, 3, 7, 3}, \ldots\}; \quad \lambda = 21, \ \mu = 7.$$

Die Periode des zweiten ℭℜ. setzt sich aus zwei symmetrischen Teilen zusammen, weil der Stamm der Form $(1, 0, -7)_+$ gleichzeitig selbstkonjugiert und umkehrbar ist. Er ist dann auch zugleich involutorisch.

Eine einfache Periode des Stammes entspricht nicht in allen Fällen einer einfachen Periode des ℭℜ., sondern es kommt vor, daß sie zwei Perioden des ℭℜ. entspricht, wenn nämlich der Stamm neben jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon$ auch die Form $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ enthält, d. h. wenn er *in sich symmetrisch* ist (vgl. das Beispiel S. 38). Aus der Betrachtung der Indexkette der reduzierten Formen ergibt sich sogleich:

19. *Je nachdem in der Periode des ℭℜ. $\lambda - \mu$ grade oder ungrade ist, ist die Periode der Formen grade so lang oder doppelt so lang, wie die Periode des ℭℜ. Im zweiten Fall ist der Stamm in sich symmetrisch.*

Es ist also nach (19.) *ein involutorischer oder ein selbstkonjugierter Stamm niemals in sich symmetrisch.*

Die Sätze 17 sind nicht ohne weiteres umkehrbar in dem Sinne, daß aus den dort angegebenen Eigenschaften der Perioden geschlossen werden könnte, daß die Stämme involutorisch, selbstkonjugiert oder umkehrbar seien. Wenn nämlich in einem Stamm zu jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon$ nicht die reziproke, sondern die zu dieser *symmetrische Form* $(-c, -b, -a)_\varepsilon$ vorkommt, so ist der Stamm nicht involutorisch, aber für die Periode des ℭℜ. gilt Satz 17ª und 18. Einen solchen Stamm kann man *scheinbar involutorisch* nennen. Der reziproke Stamm ist dann auch scheinbar involutorisch, und die beiden Stämme sind *symmetrisch*.

Ebenso ist ein Stamm *scheinbar selbstkonjugiert*, wenn zu jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon$ die zur konjugierten Form symmetrische Form $(-a, -b, -c)_\varepsilon$, und *scheinbar umkehrbar*, wenn zu jeder Form $(a, b, c)_\varepsilon$ die Form $(-c, -b, -a)_{-\varepsilon}$, also auch die damit grade-äquivalente Form $(\ \ c, b, -a)_\varepsilon$ in dem Stamm

auftritt. Für die Perioden der $\mathfrak{EK}$. gelten dann die Sätze 17^b und 17^c. Ein scheinbar selbstkonjugierter Stamm ist symmetrisch zu seinem konjugierten Stamm, bei einem scheinbar umkehrbaren Stamm ist der konjugierte Stamm symmetrisch zum reziproken Stamm.

Bezeichnet man den zu $\mathfrak{S}$ symmetrischen Stamm mit $\overline{\mathfrak{S}}$, so sind die genannten drei Arten von Stämmen kurz in folgender Weise charakterisiert:

scheinbar involutorisch: $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}^{-1}$,
„ selbstkonjugiert: $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}'$,
„ umkehrbar: $\overline{\mathfrak{S}'} = \mathfrak{S}^{-1}$.

Natürlich darf ein solcher Stamm nicht in sich symmetrisch sein, was nach dem oben Gesagten nur bei der letzten Art eintreten kann, sonst ist der Stamm nicht nur scheinbar, sondern wirklich umkehrbar.

1. Beispiel. Die reduzierte Leitform $(3, -7, 4)_+$ mit $D = 37$ gehört zu einem scheinbar involutorischen Stamm. Die reduzierte Kette ist*)

3, −7, 4	−4, 9, −11	11, −13, 12
−7, −4, 3	3, 5, −4	−3, −2, 11
−12, 11, −7	9, −8, 3	4, −5, −3
3, −1, −12	−4, 1, 9	−9, −1, 4
−11, 2, 3	7, −3, −4	−7, 10, −9
	−3, 4, 7	4, 3, −7
	12, 1, −3	3, −7, 4
		⋮

2. Beispiel. Die reduzierte Leitform $(10, -8, 3)_+$ mit $D = 34$ gehört zu einem scheinbar umkehrbaren Stamm. Die reduzierte Kette ist

10, −8, 3	5, −8, 6	−11, 10, −6
−3, 2, 10	−5, −3, 5	3, −1, −11
11, −1, −3	−6, 8, −5	−10, 2, 3
6, −10, 11	5, 2, −6	−3, 8, −10
−3, −4, 6	3, −7, 5	3, 5, −3
−5, 7, −3	−6, −4, 3	10, −8, 3
6, 2, −5		⋮

*) Die Indizes der Formen sind weggelassen, da sie mit den Vorzeichen der ersten Koeffizienten übereinstimmen.

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die scheinbar involutorischen, selbstkonjugierten oder umkehrbaren Stämme auftreten.

Ein Stamm ist scheinbar involutorisch, wenn die symmetrischen Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ ungrade äquivalent sind. Wir wollen also zunächst überhaupt die *Äquivalenz von symmetrischen Formen* betrachten. Wenn die Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ äquivalent sind, so sind sie wegen der ungleichen Indizes uneigentlich äquivalent, es ist also die zugeordnete Irrationalzahl ω sich selbst uneigentlich äquivalent:

$$\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}; \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

mithin

$$a : 2b : c = \gamma : \delta - \alpha : -\beta.$$

Hieraus folgt:

20^a. Ist der größte gemeinsame Teiler σ von $a, 2b, c$ bereits Teiler von a, b, c und ist

$$D_0 = \frac{D}{\sigma^2},$$

so ist *zur Äquivalenz der Formen* $(a, b, c)_\varepsilon$ *und* $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ *notwendig und hinreichend, daß die Gleichung*

$$(20^a.) \qquad t^2 - D_0 u^2 = -1$$

in ganzen Zahlen lösbar ist, und dann sind

$$(21^a.) \qquad \alpha = t - \frac{b}{\sigma} u, \qquad \beta = \frac{-c}{\sigma} u$$
$$\gamma = \frac{a}{\sigma} u, \qquad \delta = t + \frac{b}{\sigma} u$$

die Elemente der Substitution, die ω in sich selbst überführt.

20^b. Ist σ der größte gemeinsame Teiler von $a, 2b, c$ (aber nicht von a, b, c), so ist jedenfalls σ grade; ist dann*)

$$D_0 = \frac{D}{\sigma^2/4},$$

so ist *zur Äquivalenz von* $(a, b, c)_\varepsilon$ *und* $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$ *die Lösbarkeit der Gleichung*

$$(20^b.) \qquad t^2 - D_0 u^2 = -4$$

notwendig und hinreichend, und die Substitution ist durch

---

*) Es kann nicht $D_0 \equiv 0 \bmod 4$ sein, denn dann wäre σ schon gemeinsamer Teiler von a, b, c.

$$(21^{b}.)\qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\Big(t - \frac{b}{\sigma/_2}u\Big), \quad \beta = \frac{-c}{\sigma}u$$
$$\gamma = \frac{a}{\sigma}u, \quad \delta = \tfrac{1}{2}\Big(t + \frac{b}{\sigma/_2}u\Big)$$

gegeben. Ist Gleichung (20^{a}.) lösbar, so ist es auch (20^{b}.), wenn auch nicht immer in relativ primen Zahlen t, u, und umgekehrt ist für jede nicht durch 4 teilbare Determinante D_0, für die (20^{b}.) lösbar ist, auch (20^{a}.) lösbar.

Nunmehr können wir die zum vollständigen Beweis des Satzes 15 notwendige Ergänzung geben, indem wir den folgenden Satz beweisen:

21. *Zwei grade-äquivalente symmetrische Formen gehören immer zur gleichen Kette.*

Sei nämlich $(a, b, c)_\varepsilon$ eine Form von der in Satz 20^{a} betrachteten Art, — wir dürfen sie als reduzierte Leitform annehmen — und sei die Gleichung $t^2 - D_0 u^2 = -1$ lösbar, so ist*)

$$(22.)\qquad \begin{pmatrix} t - \frac{\varepsilon b}{\sigma}u & -\frac{\varepsilon c}{\sigma}u \\ \frac{\varepsilon a}{\sigma}u & t + \frac{\varepsilon b}{\sigma}u \end{pmatrix}$$

eine Substitution, die $(a, b, c)_\varepsilon$ in die symmetrische Form überführt. Sie soll eine grade Substitution sein. Ihr entspricht der $\mathfrak{EK}$. für die der Form zugeordnete Irrationalzahl

$$\omega = \mathfrak{E}\{\pi_1, \pi_2, .. \pi_\mu \| \omega\} = \frac{\omega P_\lambda - P_{\lambda-1}}{\omega Q_\lambda - Q_{\lambda-1}}.$$

Darin ist $\overline{\pi_1, \pi_2, .. \pi_\mu}$ die Periode des $\mathfrak{EK}$., und die Substitution $\binom{P_\lambda, -P_{\lambda-1}}{Q_\lambda, -Q_{\lambda-1}}$ muß für ein bestimmtes Lösungspaar t, u mit (22.) übereinstimmen, also

$$P_\lambda = t - \frac{\varepsilon b}{\sigma}u, \quad P_{\lambda-1} = \frac{\varepsilon c}{\sigma}u$$
$$Q_\lambda = \frac{\varepsilon a}{\sigma}u, \quad Q_{\lambda-1} = -t - \frac{\varepsilon b}{\sigma}u.$$

λ ist die Länge der Periode, und nach (6.) in I, § 2 ist**)

$$P_\lambda Q_{\lambda-1} - P_{\lambda-1} Q_\lambda = (-1)^{\lambda-\mu+1}$$

oder

$$t^2 - D_0 u^2 = (-1)^{\lambda-\mu}.$$

---

*) Man beachte, daß εa und εc positiv, εb negativ ist.

**) Für m in jener Formel ist hier $\mu - 1$ zu setzen.

Hieraus folgt aber, daß $\lambda - \mu$ *ungrade* sein muß, folglich ist nach Satz 19 der Stamm in sich symmetrisch. Dies ist aber gleichbedeutend mit Satz 21. Ganz entsprechend wird der Beweis geführt, wenn $(a, b, c)_\varepsilon$ eine Form von der in Satz 20^b betrachteten Art ist.

Damit ist der Fundamentalsatz 15 vollständig bewiesen.

Eine Form $(a, b, c)_\varepsilon$ wird zu einem scheinbar involutorischen Stamm gehören, wenn für sie die Substitution (21.) eine *ungrade* Substitution wird. Solche Formen gibt es aber für jede der in Betracht kommenden Determinanten, z. B. die Form $(1, 0, -D)_+$, denn es besteht der Satz:

Sind t, u Lösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = -1$, so ist die Substitution $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}$ stets ungrade.

Es ergibt sich dies sofort aus dem in I, § 4 bewiesenen Satz 11, denn es ist $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}$ grade-äquivalent mit der eigentlichen ungraden Substitution $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -Du \\ u & -t \end{pmatrix}$.

Wir können also den folgenden Satz aussprechen, wobei wir uns der Einfachheit halber ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf primitive Formen und Stämme beschränken dürfen:

22. *Scheinbar involutorische Stämme gibt es dann und nur dann, wenn die Gleichung*

$$t^2 - Du^2 = -1 \tag{23.}$$

in ganzen Zahlen lösbar ist.

Jede Form einer solchen Determinante, welche nicht zu einem scheinbar involutorischen Stamm gehört, ist mit ihrer symmetrischen Form grade-äquivalent, also folgt nach Satz 21:

23. *Alle nicht scheinbar involutorischen Stämme einer Determinante, für die die Gleichung* (23.) *lösbar ist, und nur diese, sind in sich symmetrisch.*

Wollen wir nun das Auftreten von scheinbar selbstkonjugierten oder scheinbar umkehrbaren Stämmen untersuchen, so liegt der eine oder der andere Fall vor, je nachdem die Formen $(a, b, c)_\varepsilon$ und $(-a, -b, -c)_\varepsilon$ grade- oder ungrade-äquivalent und die Stämme nicht in sich symmetrisch sind. Jedenfalls müssen also diese Formen oder die zugeordneten Irrationalzahlen ω und ω' eigentlich äquivalent sein, d. h., wenn noch ω' durch $\frac{c}{a\omega}$ ersetzt wird:

$$\frac{c}{a\omega} = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}; \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$

also

$$a\alpha\omega^2 + (a\beta - c\gamma)\omega - c\delta = 0. \tag{24.}$$

Ist zunächst $\alpha = 0$, so muß auch $a\beta - c\gamma = 0$ und $\delta = 0$, also $\beta = 1, \gamma = -1$ und $a = -c$ sein. Die Substitution $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist ungrade, also folgt (mit $a = m, b = n$):

24. *Jeder Stamm, welcher eine Form $(m, n, -m)_\varepsilon$ enthält, ist wirklich oder scheinbar umkehrbar, je nachdem er in sich symmetrisch ist oder nicht.*

Ist aber $\alpha \neq 0$, so folgt aus (24.)

$$\alpha + \delta = 0, \quad a\beta - c\gamma = 2b\alpha. \tag{25.}$$

Die erste Gleichung zeigt, *daß jede eigentliche Substitution, durch die eine Form $(a, b, c)_\varepsilon$ in $(-a, -b, -c)_\varepsilon$ übergeht, die Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{smallmatrix}\right)$ hat.* Jede solche Substitution ist aber nach I, § 4, Satz 11 eine *ungrade* Substitution, also finden wir:

25. *Es gibt keine scheinbar selbstkonjugierten Stämme.*

Wir sind nun weiter in der Lage, sämtliche scheinbar umkehrbare Stämme anzugeben. Da $\delta = -\alpha$ ist, so ist

$$-\beta\gamma = \alpha^2 + 1,$$

folglich müssen β und $-\gamma$, die wir als positiv voraussetzen dürfen, Summen von 2 Quadraten sein:

$$\beta = \varkappa^2 + \lambda^2, \qquad -\gamma = \mu^2 + \nu^2,$$

und da

$$-\beta\gamma = (\varkappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2) = (\varkappa\mu+\lambda\nu)^2 + (\varkappa\nu-\lambda\mu)^2 = \alpha^2+1$$

sein soll, so muß es möglich sein, $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ so zu bestimmen, daß

$$\varkappa\mu + \lambda\nu = -\alpha$$

und

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = 1$$

ist. Nach (25.) ist dann

$$a(\varkappa^2+\lambda^2) + 2b(\varkappa\mu+\lambda\nu) + c(\mu^2+\nu^2) = 0,$$

also

$$a\varkappa^2 + 2b\varkappa\mu + c\mu^2 = -(a\lambda^2 + 2b\lambda\nu + c\nu^2) = m.$$

Hieraus folgt aber:

Die Form $(a, b, c)_\varepsilon$ *geht durch die eigentliche Substitution* $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ *in die Form* $(m, n, -m)_\varepsilon$ *über*, und darin ist

$$n = a\varkappa\lambda + b(\varkappa\nu + \lambda\mu) + c\lambda\nu.$$

Es zeigt sich damit, daß Satz 24 bereits alle Möglichkeiten des Auftretens von scheinbar umkehrbaren Stämmen erschöpft: Es muß also jedenfalls die *Determinante eine Summe von zwei Quadraten* sein, und für jede solche Determinante gibt es scheinbar umkehrbare Stämme; denn wenn für eine derartige Determinante die Gleichung $t^2 - Du^2 = -1$ nicht lösbar ist, so gibt es keinen in sich symmetrischen Stamm, ist sie aber lösbar, so ist beispielsweise der scheinbar involutorische Stamm der Form $(1, 0, -D)_+$ gleichzeitig scheinbar umkehrbar. Es folgt ferner aus Satz 23, daß *für solche Determinanten, für die die Gleichung* $t^2 - Du^2 = -1$ *lösbar ist, jeder scheinbar umkehrbare Stamm gleichzeitig scheinbar involutorisch ist.*

Die Einteilung der Formen in Stämme entspricht vollständig der Klasseneinteilung in der gewöhnlichen Theorie, aber sie deckt sich nicht mit ihr. Den reziproken Stämmen entsprechen die entgegengesetzten Klassen, den involutorischen Stämmen die ambigen Klassen, es kann aber vorkommen, daß zwei reziproke Stämme zusammen eine ambige Klasse bilden oder daß ein involutorischer Stamm zwei entgegengesetzte Klassen umfaßt. So gibt es z. B. für $D = 17$ zwei reziproke Stämme mit den reduzierten Ketten:

$2, -5, 4$	$8, -9, 8$
$-4, -3, 2$	$-2, -1, 8$
$-8, 7, -4$	$4, -3, -2$
$2, -1, -8$	$-4, 1, 4$
$-8, 1, 2$	$2, -3, -4$
$-4, 7, -8$	$-8, -1, 2$
$2, 3, -4$	$-8, 9, -8$
$4, -5, 2$	$\vdots$
$-4, -1, 4$	
$-2, 5, -4$	
$\vdots$	

Diese beiden Stämme bilden zusammen eine ambige Klasse.

Dagegen besteht für $D = 79$ der folgende involutorische Stamm aus zwei entgegengesetzten Klassen; alle Formen mit gleichem Index gehören zu einer Klasse:

6, −11, 7	−21, 25, −26	−18, 13, − 5
− 9, − 5, 6	3, 4, −21	3, − 5, −18
−13, 14, − 9	−10, 7, 3	−25, − 2, 3
6, 1, −13	7, − 3, −10	−26, 27, −25
− 5, 7, 6	− 9, 4, 7	3, 1, −26
15, 2, − 5	6, − 5, − 9	−21, 4, 3
14, −17, 15	−13, 1, 6	−10, 17, −21
− 5, − 3, 14	− 5, 12, −13	3, 7, −10
3, − 8, − 5	6, 7, − 5	7, −10, 3
−18, − 5, 3	15, −13, 6	−10, − 3, 7
−25, 23, −18	− 5, 2, 15	− 9, 13, −10
3, − 2, −25	14, − 3, − 5	7, 4, − 9
−26, 1, 3	3, −11, 14	6, −11, 7
	− 5, − 8, 3	⋮

Allgemein gelten die folgenden Sätze:

26ª. *Zwei reziproke Stämme bilden eine ambige Klasse,* wenn jede Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist, also wenn gleichzeitig mit $(a, b, c)_\varepsilon$ auch die konjugierte Form $(a, b, c)_{-\varepsilon}$ entweder im gleichen oder im reziproken Stamm auftritt, d. h. *wenn jeder Stamm entweder selbstkonjugiert oder umkehrbar ist.*

26ᵇ. *Ein involutorischer Stamm bildet eine ambige Klasse, wenn er selbstkonjugiert ist. Er ist dann gleichzeitig umkehrbar.*

Es sei $(a, b, c)_\varepsilon$ eine *eigentlich primitive Form.* Alle Transformationen der Form in sich werden erhalten durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + bu & cu \\ -au & t - bu \end{pmatrix}, \tag{26.}$$

worin t, u Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bedeuten. Ist nun $D \equiv 1 \bmod 4$ oder $D \equiv 2 \bmod 4$ oder $D \equiv 4 \bmod 8$, so muß notwendig u grade sein, also sind dann nach I, § 4, Satz 10 alle Substitutionen (26.) grade Substitutionen, und es folgt:

Ist $D \equiv 1$ ***mod*** 4 ***oder*** $D \equiv 2$ ***mod*** 4 ***oder*** $D \equiv 4$ ***mod*** 8, ***so gibt es keine ungraden Transformationen einer eigentlich primitiven Form in sich.***

Hieraus schließt man nach Satz 16:

27. *Eigentlich primitive involutorische Stämme kann es nur für* $D \equiv 0$ ***mod*** 8 ***und*** $D \equiv 3$ ***mod*** 4 ***geben.***

Ist aber $(a, b, c)_e$ eine *uneigentlich primitive Form*, also a und c grade Zahlen, dagegen b ungrade, so sind alle Transformationen der Form in sich durch

$$(27.) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+bu}{2} & \frac{c}{2}u \\ -\frac{a}{2}u & \frac{t-bu}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben, und darin sind t, u Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Hier ist $D \equiv 1 \bmod 4$. Sind t und u grade, so ist die Substitution grade. Sind t und u ungrade, so muß eine der Zahlen $\frac{t+bu}{2}$ und $\frac{t-bu}{2}$ grade, die andere ungrade sein, folglich sind $\frac{a}{2}$ und $\frac{c}{2}$ ungrade und alle Substitutionen (27.) sind wiederum nach I, § 4, Satz 10 grade. Daraus folgt der Satz:

28. *Es gibt keine uneigentlich primitiven involutorischen Stämme.*

Während es also für jede Determinante ambige Klassen gibt, treten involutorische Stämme ungleich seltener auf.

Zum Schluß geben wir eine Tafel aller primitiven Stämme bis $D = 33$. In der ersten Spalte stehen unter dem Wert der Determinante die Anzahl der Stämme und der Klassen. In der zweiten Spalte steht als Vertreter eines jeden Stammes eine reduzierte Leitform. Nur für $D = 5$ ist die letzte Form entsprechend Satz 12 keine Leitform. Je zwei reziproke Stämme sind durch eine geschweifte Klammer verbunden. i, s oder u bedeutet, daß der Stamm involutorisch, selbstkonjugiert oder umkehrbar, (i) oder (u), daß er scheinbar involutorisch oder scheinbar umkehrbar ist. Ein wagrechter Strich zwischen den Formen einer Determinante scheidet die eigentlich primitiven Stämme von den uneigentlich primitiven. Die dritte Spalte enthält die Periode des zu der Leitform gehörigen Elementarkettenbruchs.

Wie man sieht, sind alle Stämme der Tafel entweder selbstkonjugiert oder umkehrbar. Dies kommt daher, daß bis $D = 33$ nur ambige Klassen vorkommen. Mit $D = 34$ treten die ersten nicht ambigen Klassen auf; ihnen entsprechen zwei reziproke Stämme mit den Leitformen $(6, -10, 11)$ (Periode 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3) und $(11, -12, 10)$ (Periode 8, 4) und die beiden dazu symmetrischen Stämme. Sie sind scheinbar umkehrbar, aber nicht scheinbar involutorisch, weil für diese Determinante die Gleichung $t^2 - Du^2 = -1$ nicht lösbar ist. Bekanntlich sind es im ersten Hundert nur die Determinanten 34, 37, 79, 82, für die nicht ambige Klassen existieren*).

*) *Gauß*, Disqu. arithm. § 304. Nach der Tafel von *Cayley* (ds. Journ. Bd. 60) würde noch $D = 99$ mit dem Typus IV, 2 hinzukommen, während *Gauß* (Werke Bd. 2, S. 475) den Typus IV, 1 angibt. Bei einem Vergleich der *Cayley*schen Tafel mit unserer ist zu beachten, daß dort alle Formen mit positivem Index zu versehen sind.

D	Leitform	Periode
2 2 1	1, −2, 2 −1, 2, −2 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 4
3 2 2	1, −2, 1 *i*, *s*, *u* −1, 2, −1 *i*, *s*, *u*	2, 5, 2
5 4 2	1, −3, 4 −1, 3, −4 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 3, 4, 3
	2, −3, 2 2, −1, −2 } *u*	2 ∞
6 4 2	1, −3, 3 3, −3, 1 } *s* −1, 3, −3 −3, 3, −1 } *s*	2, 3, 4 4, 3, 2
7 2 2	1, −3, 2 *i*, *s*, *u* −1, 3, −2 *i*, *s*, *u*	2, 3, 7, 3, 2, 2, 2
8 2 2	1, −3, 1 *i*, *s*, *u* −1, 3, −1 *i*, *s*, *u*	2, 3, 5, 3, 2
10 4 2	1, −4, 6 −1, 4, −6 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 3, 3, 4, 3, 3
	2, −4, 3 −2, 4, −3 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 6, 2, 2
11 2 2	1, −4, 5 *i*, *s*, *u* −1, 4, −5 *i*, *s*, *u*	2, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 3
12 4 2	1, −4, 4 4, −4, 1 } *s* −1, 4, −4 −4, 4, −1 } *s*	2, 3, 3, 4 4, 3, 3, 2
13 4 2	1, −4, 3 −1, 4, −3 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 3, 3, 8, 3, 3, 2, 2, 2, 2.
	2, −5, 6 6, −7, 6 } *u*	2, 3 4
14 4 2	1, −4, 2 2, −4, 1 } *s* −1, 4, −2 −2, 4, −1 } *s*	2, 3, 3, 5, 2 2, 5, 3, 3, 2
15 4 4	1, −4, 1 *i*, *s*, *u* −1, 4, −1 *i*, *s*, *u*	2, 3, 3, 5, 3, 3, 2
	2, −5, 5 *i*, *s*, *u* −2, 5, −5 *i*, *s*, *u*	2, 3, 2, 4, 4
17 4 2	1, −5, 8 −1, 5, −8 } (*i*), *s*, (*u*)	2, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3
	2, −5, 4 8, −9, 8 } *u*	2, 3, 2, 2 6
18 4 2	1, −5, 7 7, −5, 1 } *s* −1, 5, −7 −7, 5, −1 } *s*	2, 3, 3, 3, 4, 3 3, 4, 3, 3, 3, 2
19 2 2	1, −5, 6 *i*, *s*, *u* −1, 5, −6 *i*, *s*, *u*	2, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 5

D	Leitform	Periode
20 4 2	1, −5, 5 } s 5, −5, 1 } −1, 5, −5 } s −5, 5, −1 }	2, 3, 3, 3, 4 4, 3, 3, 3, 2
21 8 4	1, −5, 4 } s 4, −5, 1 } −1, 5, −4 } s −4, 5, −1 }	2, 3, 3, 3, 6, 2, 2 2, 2, 6, 3, 3, 3, 2
	6, − 9, 10 } u 10, −11, 10 } − 6, 9, −10 } u −10, 11, −10 }	2, 2, 3 5
22 4 2	1, −5, 3 } s 3, −5, 1 } −1, 5, −3 } s −3, 5, −1 }	2, 3, 3, 3, 5, 2, 3, 4, 2 2, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2
23 2 2	1, −5, 2 i, s, u −1, 5, −2 i, s, u	2, 3, 3, 3, 5, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2
24 4 4	1, −5, 1 i, s, u −1, 5, −1 i, s, u 3, −6, 4 i, s, u −3, 6, −4 i, s, u	2, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 3, 2 2, 7, 2, 2, 2
26 4 2	1, −6, 10 } $(i), s, (u)$ −1, 6, −10 } 2, −6, 5 } $(i), s, (u)$ −2, 6, − 5 }	2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3 2, 3, 6, 3, 2, 2
27 2 2	1, −6, 9 i, s, u −1, 6, −9 i, s, u	2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3
28 4 2	1, −6, 8 } s 8, −6, 1 } −1, 6, −8 } s −8, 6, −1 }	2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 2, 3 3, 2, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2

D	Leitform	Periode
29 4 2	1, −6, 7 } $(i), s, (u)$ −1, 6, −7 }	2, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 6
	2, − 7, 10 } u 14, −13, 10 }	2, 3, 3 3, 4
30 8 4	1, −6, 6 } s 6, −6, 1 } −1, 6, −6 } s −6, 6, −1 }	2, 3, 3, 3, 3, 4 4, 3, 3, 3, 3, 2
	2, −6, 3 } s 3, −6, 2 } −2, 6, −3 } s −3, 6, −2 }	2, 3, 5, 2 2, 5, 3, 2
31 2 2	1, −6, 5 i, s, u −1, 6, −5 i, s, u	2, 3, 3, 3, 3, 6, 4, 3, 4, 6, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2
32 2 2	1, −6, 4 i, s, u −1, 6, −4 i, s, u	2, 3, 3, 3, 3, 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2
33 8 4	1, −6, 3 } s 3, −6, 1 } −1, 6, −3 } s −3, 6, −1 }	2, 3, 3, 3, 3, 5, 2 2, 5, 3, 3, 3, 3, 2
	4, − 7, 4 } u 16, −17, 16 } − 4, 7, − 4 } u −16, 17, −16 }	2, 4, 3, 4, 2 3, 2, 5, 2, 3

Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters.

Von Herrn *Oskar Perron* in Heidelberg.

§ 1.

Setzt man in der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \quad (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

$\frac{x}{\alpha}$ an Stelle von x und läßt dann α über alle Grenzen wachsen, so entsteht rein formal die ausgeartete hypergeometrische Reihe

$$(1.) \qquad \Phi(\beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \quad (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Das ist eine ganze Funktion von x, und zwar, wenn $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ ist, eine transzendente.

Die Funktion Φ genügt, wie man leicht verifiziert, der ausgearteten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(2.) \qquad xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0,$$

und zwar ist sie das einzige am Nullpunkt reguläre Integral derselben. Durch die Substitution $y = e^x z$ geht Gleichung (2.) über in:

$$xz'' + (\gamma + x)z' - (\beta - \gamma)z = 0.$$

Das im Nullpunkt reguläre Integral dieser neuen Gleichung ist augenscheinlich $\Phi(\gamma - \beta, \gamma; -x)$, und daher muß

$$\Phi(\beta, \gamma; x) = C \cdot e^x \Phi(\gamma - \beta, \gamma; -x)$$

sein. Für die Konstante C ergibt sich, indem man $x = 0$ setzt, der Wert 1. Also genügt die Funktion Φ der Funktionalgleichung

$$(3.) \qquad \Phi(\beta, \gamma; x) = e^x \Phi(\gamma - \beta, \gamma; -x).$$

Setzt man in (1.) $\gamma + n$ an Stelle von γ, so ist das infinitäre Verhalten für $n \to \infty$ evident. Es ist eben

$$\Phi(\beta, \gamma+n; x) = 1 + \frac{\beta}{1\cdot(\gamma+n)}x + \frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot(\gamma+n)(\gamma+n+1)}x^2 + \cdots;$$

also, wenn man die Reihe nach dem ersten, zweiten, dritten ... Glied abbricht,

$$\Phi(\beta, \gamma+n; x) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\Phi(\beta, \gamma+n; x) = 1 + \frac{\beta}{\gamma+n}x + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\Phi(\beta, \gamma+n; x) = 1 + \frac{\beta}{\gamma+n}x + \frac{\beta(\beta+1)}{2(\gamma+n)(\gamma+n+1)}x^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

— —.

Dabei ist es hier wie auch späterhin gleichgültig, ob n ganzzahlig oder beliebig ins Unendliche wächst.

Dagegen ist das infinitäre Verhalten von $\Phi(\beta+n, \gamma+n; x)$ für $n \to \infty$ aus der Reihe (1.) nicht zu erkennen. Nach der Transformationsformel (3.) ist aber

$$\Phi(\beta+n, \gamma+n; x) = e^x \Phi(\gamma-\beta, \gamma+n; -x),$$

und damit ist die Frage auf den vorigen Fall zurückgeführt. Man hat hiernach die Beziehungen:

$$\Phi(\beta+n, \gamma+n; x) = e^x + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\Phi(\beta+n, \gamma+n; x) = e^x\left[1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma+n}x\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\Phi(\beta+n, \gamma+n; x) = e^x\left[1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma+n}x + \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{2(\gamma+n)(\gamma+n+1)}x^2\right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

— —.

§ 2.

Im vorigen Paragraphen sind die trivialen Fälle erschöpft. Viel schwieriger ist die Untersuchung der Funktion

$$\Phi(\beta+n, \gamma; x).$$

Das soll gerade die Aufgabe der gegenwärtigen Arbeit sein. Um sie zu lösen, drücken wir Φ durch ein bestimmtes Integral aus. Für $\Re(\beta) > 0$, $\Re(\gamma-\beta) > 0$ ist bekanntlich

$$\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\,dv = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Bezeichnet man mit S eine Schleife in der v-Ebene, die vom Nullpunkt ausgehend zunächst der positiven reellen Achse folgt, dann den Punkt $v=1$ in positivem Sinne einmal umläuft und schließlich zum Nullpunkt zurückkehrt, so ist

$$\int_S v^{\beta-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}\,dv = (e^{-\pi i(\gamma-\beta-1)} - e^{\pi i(\gamma-\beta-1)}).\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\,dv,$$

wie man in bekannter Weise einsieht, indem man die Schleife S deformiert, bis sie sich auf die vor- und rückwärts durchlaufene Strecke (0, 1) zusammenzieht. Daher ist mit Benutzung einer bekannten Formel aus der Theorie der Gammafunktion:

$$\int_S v^{\beta-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}\,dv = 2i\sin\pi(\gamma-\beta)\cdot\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}$$
$$= 2\pi i\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)}.$$

Hierbei muß $\Re(\beta)>0$ sein, während die weitere Bedingung $\Re(\gamma-\beta)>0$ überflüssig ist. Denn auf beiden Seiten der Gleichung stehen ganze transzendente Funktionen von γ.

Wenn man hiernach in dem Integral

$$\int_S v^{\beta-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}e^{xv}\,dv \qquad \Re(\beta)>0$$

e^{xv} nach Potenzen von x entwickelt und dann gliedweise integriert, erhält man:

$$\int_S v^{\beta-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}e^{xv}\,dv = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}\int_S v^{\beta+\nu-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}\,dv$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}\,2\pi i\frac{\Gamma(\beta+\nu)}{\Gamma(\gamma+\nu)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)},$$

oder also

$$(4.)\quad \int_S v^{\beta-1}(v-1)^{\gamma-\beta-1}e^{xv}\,dv = \frac{2\pi i\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)}\,\Phi(\beta,\gamma;x), \qquad \Re(\beta)>0.$$

Setzt man $v=\frac{1}{t}$, so ergibt sich schließlich:

$$(5.)\quad \Phi(\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)}{2\pi i\,\Gamma(\beta)}\int_L t^{-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}e^{\frac{x}{t}}\,dt, \qquad \Re(\beta)>0,$$

wobei der Integrationsweg L in der t-Ebene eine Linie ist, die vom Unendlichen kommt, die Strecke (0, 1) von der unteren in die obere Halbebene durchsetzt und wieder ins Unendliche geht. Man kann beispielsweise geradlinig von $a-i\infty$ bis $a+i\infty$ integrieren, wenn a eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet.

Die Formel (5.) ist die gesuchte Integraldarstellung. Setzt man $\beta+n$ an Stelle von β, so ist die Bedingung $\Re(\beta+n)>0$ wegen $n\to\infty$ von selbst erfüllt, und es ergibt sich:

$$(6.)\quad \Phi(\beta+n,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{2\pi i\,\Gamma(\beta+n)}\int_L t^{-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1-n}e^{\frac{x}{t}}\,dt.$$

Das hier auftretende Integral ist von der Form

$$\int t^{-\gamma}f(t)\,\varphi(t)^n\,dt,$$

und zwar ist $\varphi(t) = \frac{1}{1-t}$. Das Verhalten von Integralen dieser Form für $n \to \infty$ habe ich unlängst in zwei Arbeiten untersucht*). Bei der dort befolgten Methode muß der Integrationsweg so abgeändert werden, daß auf ihm das Maximum von $|\varphi(t)|$ so klein wie möglich wird. An der Stelle, wo dieses Maximum erreicht wird (hier ist es der Nullpunkt), war die Funktion $f(t)$ als regulär vorausgesetzt; sie kann aber auch einen Pol haben, was lediglich auf eine Wertänderung von γ hinausläuft; der Stelle selbst muß nötigenfalls auf einem kleinen Bogen ausgewichen werden.

In unserm Fall hat nun die Funktion

$$f(t) = (1-t)^{\gamma-\beta-1} e^{\frac{x}{t}}$$

am Nullpunkt eine *wesentlich singuläre Stelle.* Das scheint die Anwendung meiner Methode auszuschließen. Man kann aber auch jetzt zum Ziel gelangen, wenn man den Integrationsweg und insbesondere den kleinen Bogen, auf dem man dem Nullpunkt ausweicht, nicht fest wählt, sondern in einer von n abhängigen Weise variiert. Schreibt man nämlich $\frac{t}{\sqrt{n}}$ an Stelle von t, so geht die Formel (6.) über in:

$$(7.)\quad \Phi(\beta+n, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{2\pi i\,\Gamma(\beta+n)}\, n^{\frac{\gamma-1}{2}} \int_{L_1} t^{-\gamma}\Big(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{\gamma-\beta-1-n} e^{\frac{x\sqrt{n}}{t}}\, dt,$$

wo in der neuen t-Ebene der Integrationsweg L_1 aus dem Unendlichen kommt, die Strecke $(0, \sqrt{n})$ von der unteren in die obere Halbebene durchsetzt und wieder ins Unendliche geht. Diesen Weg L_1 wollen wir nun unabhängig von n in passender Weise wählen; es wird sich dann zeigen, daß die a. a. O. erlangten Resultate anwendbar sind. Doch ist es notwendig, zunächst den Integranden etwas umzuformen.

Für $|t| < \sqrt{n}$ ist

$$(\gamma-\beta-1-n)\log\Big(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = (n+1+\beta-\gamma)\Big(\frac{t}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{2}\frac{t^2}{\sqrt{n}^2} + \tfrac{1}{3}\frac{t^3}{\sqrt{n}^3} + \cdots\Big)$$

$$= t\sqrt{n} + \tfrac{1}{2}t^2 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\omega_\lambda(t)}{\sqrt{n}^\lambda},$$

---

*) Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter; zweiter Teil. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-nat. Klasse, Abt. A. Jahrgang 1917. — Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Sitzungsberichte der k. bayr. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Jahrgang 1917.

wobei die $\omega_\lambda(t)$ Polynome von t sind. Daraus folgt weiter:

$$(8.) \qquad \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma-\beta-1-n} = e^{t\sqrt{n}+\frac{1}{2}t^2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Omega_\lambda(t)}{\sqrt{n}^\lambda},$$

wo die $\Omega_\lambda(t)$ ebenfalls Polynome von t sind, und speziell ist

$$(9.) \qquad \Omega_0(t)=1.$$

Wir setzen nun, unter k irgendeine positive ganze Zahl verstehend,

$$(10.) \qquad \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma-\beta-1-n} = e^{t\sqrt{n}+\frac{1}{2}t^2}\cdot\left(\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{\Omega_\lambda(t)}{\sqrt{n}^\lambda}+\frac{R_k(n,t)}{\sqrt{n}^{k+1}}\right),$$

und wollen den Rest $R_k(n,t)$ passend abschätzen. Beschränken wir zu dem Zweck t auf einen Bereich $|t|\leqq r$, wobei natürlich $r<\sqrt{n}$ sein muß, so ist analog zu (8.):

$$(11.) \qquad \left(1-\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-|\gamma-\beta|-1-n} = e^{r\sqrt{n}+\frac{1}{2}r^2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Omega_\lambda^*(r)}{\sqrt{n}^\lambda},$$

und zwar ist die hier auftretende Reihe nach ihrer Entstehungsweise eine Majorante zu der in (8.); also

$$(12.) \qquad |\Omega_\lambda(t)|\leqq\Omega_\lambda^*(r).$$

Da die Reihe (11.), wenn $\sqrt{n}>r$ ist, also gewiß für $\sqrt{n}=2r$ konvergiert, so ist für $\sqrt{n}\geqq 2r$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Omega_{k+1+\lambda}^*(r)}{\sqrt{n}^\lambda}\leqq\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Omega_{k+1+\lambda}^*(r)}{(2r)^\lambda}=\Psi_k(r),$$

wobei $\Psi_k(r)$ lediglich von r, nicht aber von n abhängt. Wegen (12.) ist dann erst recht

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Omega_{k+1+\lambda}(t)}{\sqrt{n}^\lambda}\right|\leqq\Psi_k(r) \qquad \text{für } |t|\leqq r\leqq\tfrac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Das heißt aber soviel wie:

$$(13.) \qquad |R_k(n,t)|\leqq\Psi_k(r) \qquad \text{für } |t|\leqq r\leqq\tfrac{1}{2}\sqrt{n}.$$

§ 3.

Nunmehr wollen wir in (7.) den Integrationsweg L_1 so wählen, daß er von $-\infty$ ausgehend zunächst der negativen reellen Achse folgt, sodann den Nullpunkt in positiver Richtung einmal umläuft, und schließlich nach $-\infty$ zurückkehrt. Diese Wahl ist offenbar zulässig. Als Linie, auf welcher der Nullpunkt umlaufen wird, wählen wir einen Kreis K, der den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, und dessen Radius r wir noch zweckmäßig bestimmen werden. Die beiden Integrale längs der negativen reellen Achse unterscheiden sich voneinander nur durch den Faktor $-e^{2\pi i\gamma}$; wenn man in ihnen $-t$ an Stelle von t schreibt, erhält man leicht aus (7.):

$$(14.)\qquad \Phi(\beta+n,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{2\pi i\,\Gamma(\beta+n)}\,n^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(S_n+2i\sin\pi\gamma\cdot T_n),$$

wobei

$$(15.)\qquad S_n=\int_K t^{-\gamma}\Big(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{\gamma-\beta-1-n}\,e^{\frac{x\sqrt{n}}{t}}\,dt,$$

$$(16.)\qquad T_n=\int_r^{\infty} t^{-\gamma}\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{\gamma-\beta-1-n}\,e^{-\frac{x\sqrt{n}}{t}}\,dt.$$

In dem Integral S_n ist $|t|=r$. Daher können wir die Formeln (10.) und (13.) anwenden, wodurch sich ergibt:

$$(17.)\qquad \begin{cases} S_n=\sum\limits_{\lambda=0}^{k}\dfrac{1}{\sqrt{n}^{\lambda}}\displaystyle\int_K t^{-\gamma}\,\Omega_\lambda(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}e^{\left(\frac{x}{t}+t\right)\sqrt{n}}\,dt \\ \qquad +\dfrac{1}{\sqrt{n}^{k+1}}\displaystyle\int_K t^{-\gamma}\,R_k(n,t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}e^{\left(\frac{x}{t}+t\right)\sqrt{n}}\,dt. \end{cases}$$

Nunmehr ist klar, daß wir die beste Abschätzung erhalten werden, wenn wir den Radius r des Kreises K so wählen, daß auf K das Maximum von

$$\left|e^{\frac{x}{t}+t}\right|$$

so klein wie möglich wird, oder, was dasselbe sagt, daß das Maximum von

$$\Re\Big(\frac{x}{t}+t\Big)$$

so klein wie möglich wird. Der Kreis muß in diesem Fall durch einen Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung

$$\Re\Big(\frac{x}{t}+t\Big)=\text{Const.}$$

gehen. In einem solchen ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{t}+t\Big)=0,$$

also $t=\pm\sqrt{x}$. Daher muß $r=\left|\sqrt{x}\right|$ gewählt werden.

Nunmehr schließen wir zunächst den Fall aus, daß x reell und negativ ist. Sei also

$$(18.)\qquad x=\xi e^{i\vartheta},\qquad \xi>0,\ -\pi<\vartheta<\pi.$$

Es ist dann

$$(19.)\qquad r=\sqrt{\xi},$$

und auf dem Kreis K können wir

$$t=\sqrt{x}\,e^{iz}=\sqrt{\xi}\,e^{i\left(\frac{\vartheta}{2}+z\right)}$$

setzen; dabei läuft z reell von $-\pi-\frac{\vartheta}{2}$ bis $\pi-\frac{\vartheta}{2}$, und es ist also

$$(20.) \qquad \int_K t^{-\gamma}\,\Omega_\lambda(t)\,e^{\frac{1}{4}t^2}\,e^{\left(\frac{x}{t}+t\right)\sqrt{n}}\,dt = i\,\xi^{\frac{1-\gamma}{2}}\,e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}}\cdot S_{n,\lambda},$$

wobei

$$(21.)\; S_{n,\lambda} = \int_{-\pi-\frac{\vartheta}{2}}^{\pi-\frac{\vartheta}{2}} e^{i\left(\frac{\vartheta}{2}+z\right)(1-\gamma)}\,\Omega_\lambda\left(\sqrt{\xi}\,e^{i\left(\frac{\vartheta}{2}+z\right)}\right)e^{\frac{1}{4}\xi\,e^{i(\vartheta+2z)}}\,e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}(\cos z-1)}\,dz.$$

Wegen $-\pi < \vartheta < \pi$ ist die Funktion

$$\varphi(z) = e^{2e^{\frac{i\vartheta}{2}}(\cos z-1)}$$

für alle in Betracht kommenden Werte von z absolut kleiner als 1; nur für $z=0$ ist $\varphi(z)=\varphi(0)=1$. Daher kann man auf das Integral $S_{n,\lambda}$ die Resultate anwenden, die ich in der zweiten auf Seite 66 genannten Arbeit gewonnen habe, wobei nur $\sqrt{\xi n}$ an Stelle von n zu treten hat. Nach der dortigen Formel (31.) ist das Integral $S_{n,\lambda}$ asymptotisch gleich einer Reihe der Form

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{\nu,\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\xi n}}\right)^{\frac{1+\nu}{2}}.$$

Und zwar ist

$$Q_{0,\lambda} = (e^{i\omega_2}-e^{i\omega_1})\,e^{i\frac{\vartheta}{2}(1-\gamma)}\cdot\Omega_\lambda\left(\sqrt{\xi}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}\right)\cdot e^{\frac{1}{4}\xi e^{i\vartheta}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

wobei

$$\omega_1 = \pi - \frac{\vartheta}{4},\quad \omega_2 = -\frac{\vartheta}{4};$$

also

$$(22.) \qquad Q_{0,\lambda} = 2\sqrt{\pi}\,e^{i\vartheta\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\cdot e^{\frac{1}{4}\xi e^{i\vartheta}}\cdot\Omega_\lambda\left(\sqrt{\xi}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}\right).$$

Allgemein findet man a. a. O. für $Q_{\nu,\lambda}$ den Ausdruck

$$Q_{\nu,\lambda} = (e^{i\omega_2(1+\nu)}-e^{i\omega_1(1+\nu)})\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{g_{\nu,\mu,\lambda}}{\left(e^{i\frac{\vartheta}{2}}\right)^{\mu}}\,\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+\mu\right).$$

Auf die Bedeutung der Zahlen $g_{\nu,\mu,\lambda}$ wollen wir hier nicht eingehen. Doch bemerken wir, daß für ungerade Werte von ν stets $Q_{\nu,\lambda}=0$ ist wegen des Faktors

$$e^{i\omega_2(1+\nu)}-e^{i\omega_1(1+\nu)} = e^{-i\frac{\vartheta}{4}(1+\nu)}\,(1-e^{i\pi(1+\nu)}).$$

Die asymptotische Entwicklung des Integrals $S_{n,\lambda}$ ist hiernach:

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu,\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\xi n}}\right)^{\frac{1}{2}+\nu} = \frac{1}{2}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\,n^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Q_{2\nu,\lambda}}{\sqrt{\xi n}^{\nu}}.$$

Man hat also insbesondere:

$$S_{n,\lambda} = \frac{1}{2}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\,n^{-\frac{1}{4}}\left[\sum_{\nu=0}^{k-\lambda}\frac{Q_{2\nu,\lambda}}{\sqrt{\xi n}^{\nu}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\xi n}^{k-\lambda+1}}\Big)\right];$$

und wenn man das in (20.) und dann in (17.) einsetzt, folgt nach leichter Umordnung der Glieder:

$$(23.)\quad \begin{cases} S_n = \dfrac{i}{2}\,\xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\,n^{-\frac{1}{4}}\,e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}}\left[\displaystyle\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\sum_{\lambda=0}^{\nu} Q_{2\lambda,\nu-\lambda}\,\xi^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{n}^{\nu}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}^{k+1}}\Big)\right] \\ \quad + \dfrac{1}{\sqrt{n}^{k+1}}\displaystyle\int_K t^{-\gamma}\,R_k(n,t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}\,e^{\left(\frac{x}{t}+t\right)\sqrt{n}}\,dt. \end{cases}$$

Das Restintegral ist leicht abzuschätzen. Nach (13.) ist für $|t| = \sqrt{\xi}$, das heißt auf dem Kreise K,

$$|R_k(n,t)| \leqq \Psi_k(\sqrt{\xi}).$$

Außerdem bleibt jedenfalls

$$|t^{-\gamma}\,e^{\frac{1}{2}t^2}|$$

unter einer Schranke G, und endlich ist

$$\left|e^{\left(\frac{x}{t}+t\right)\sqrt{n}}\right| = \left|e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}\cos z}\right| = e^{2\sqrt{\xi n}\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\cos z} \leqq e^{2\sqrt{\xi n}\cos\frac{\vartheta}{2}}.$$

Daher erweist sich das fragliche Integral absolut kleiner als

$$G\,\Psi_k(\sqrt{\xi})\,e^{2\sqrt{\xi n}\cos\frac{\vartheta}{2}}\,2\pi\sqrt{\xi} = 2G\pi\sqrt{\xi}\;\Psi_k(\sqrt{\xi})\left|e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}}\right|.$$

Aus (23.) folgt somit, wenn noch zur Abkürzung

$$(24.)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu} Q_{2\lambda,\nu-\lambda}\,\xi^{-\frac{\lambda}{2}} = q_\nu$$

gesetzt wird:

$$S_n = \frac{i}{2}\,\xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\,n^{-\frac{1}{4}}\,e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}}\left[\sum_{\nu=0}^{k}\frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}^{k+\frac{1}{2}}}\Big)\right].$$

Da diese Formel für beliebig große Werte von k gilt, besagt sie soviel wie

$$(25.)\qquad S_n \backsim \frac{i}{2}\,\xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\,n^{-\frac{1}{4}}\,e^{2\sqrt{\xi n}\,e^{\frac{i\vartheta}{2}}}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}}.$$

Nunmehr wenden wir uns dem Integral T_n zu (Formel (16.)). Offenbar ist, nachdem wir $r = \sqrt{\xi}$ gesetzt haben:

$$|T_n\sqrt{n}^{\gamma}| \leqq \int_{\sqrt{\xi}}^{\infty}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-\Re(\gamma)}\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{\Re(\gamma-\beta)-1-n}\,e^{-\frac{\xi\cos\vartheta}{t}\sqrt{n}}\,dt = \int_{\sqrt{\xi}}^{\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{\infty}.$$

Nun ist für $t \geqq \sqrt{\xi}$:

$$e^{-\frac{\xi\cos\vartheta}{t}\sqrt{n}} \leqq e^{\frac{\xi\sqrt{n}}{t}\cdots} \leqq e^{\sqrt{\xi n}}.$$

Ferner für $\sqrt{\xi} \leqq t \leqq \sqrt{n}$:

$$\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-\Re(\gamma)} \leqq \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-|\gamma|} \leqq \sqrt{\frac{n}{\xi}}^{|\gamma|},$$

$$\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\Re(\gamma-\beta)-1-n} < \left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{|\gamma-\beta|-n} \leqq 2^{|\gamma-\beta|}\left(1+\sqrt{\frac{\xi}{n}}\right)^{-n}$$

$$< 2^{|\gamma-\beta|}\, e^{-n\left(\sqrt{\frac{\xi}{n}}-\frac{1}{2}\frac{\xi}{n}\right)} = 2^{|\gamma-\beta|}\, e^{\frac{1}{2}\xi} e^{-\sqrt{\xi n}}.$$

Für $t \leqq \sqrt{n}$ **ist dagegen, wenn nur** n **genügend groß,**

$$\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-\Re(\gamma)}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\Re(\gamma-\beta)-1-n} \leqq \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{|\gamma|}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{|\gamma-\beta|-1-n}$$

$$\leqq \left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{|\gamma|+|\gamma-\beta|+1-n} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2}} \leqq \frac{2^{|\gamma|+|\gamma-\beta|+1-n}}{\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2}}.$$

Nimmt man diese Abschätzungen in den obigen Integralen vor, so ergibt sich:

$$|T_n \sqrt{n}^{\gamma}| < \int_{\sqrt{\xi}}^{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{\xi}}^{-|\gamma|} 2^{|\gamma-\beta|}\, e^{\frac{1}{4}\xi}\, dt + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} 2^{|\gamma|+|\gamma-\beta|+1-n}\, e^{\sqrt{\xi n}} \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2}}$$

$$= O\left(\sqrt{n}^{|\gamma|+1}\right) + O\left(2^{-n}\, e^{\sqrt{\xi n}}\sqrt{n}\right) = O\left(\sqrt{n}^{|\gamma|+1}\right).$$

Hiernach ist, wenn k **eine beliebig große Zahl bedeutet, gewiß**

$$T_n = O\left(e^{2\sqrt{\xi n}\cos\frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}^{k}}\right);$$

denn $\cos\frac{\vartheta}{2}$ **ist positiv.**

Setzt man also in (14.) für S_n die asymptotische Reihe (25.) ein, so kann das Glied mit T_n als infinitär kleiner unterdrückt werden, und es kommt:

$$\Phi(\beta+n, \gamma; x) \backsim \frac{\Gamma(\gamma)}{4\pi}\xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} \frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} n^{\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}} e^{2\sqrt{\xi n}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}}.$$

Nun besteht bekanntlich eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} \backsim n^{1-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{n^{\nu}},$$

wobei $a_0 = 1$ ist, während es uns auf die übrigen Koeffizienten a_ν nicht ankommt. Setzt man das oben ein, so ergibt sich als Endresultat, daß für $\Phi(\beta+n, \gamma; x)$ eine asymptotische Entwicklung der folgenden Form existiert:

$$(26.) \qquad \Phi(\beta+n, \gamma; x) \backsim \frac{\Gamma(\gamma)}{4\pi}\xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} n^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} e^{2\sqrt{\xi n}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}}.$$

Von den Koeffizienten p_ν ist der erste p_0 leicht anzugeben. Es ist nämlich $p_0 = q_0$; also nach (24.), (22.) und (9.):

$$p_0 = q_0 = Q_{0,0} = 2\sqrt{\pi}\, e^{i\vartheta\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot e^{\frac{1}{2}\xi e^{i\vartheta}}.$$

Aus (26.) folgt daher insbesondere, wenn man die Reihe nach dem ersten Glied abbricht:

$$\Phi(\beta+n,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} e^{i\vartheta\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)} e^{\frac{1}{2}\xi e^{i\vartheta}}\, n^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} e^{2\sqrt{\xi n}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} \cdot \left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Da aber $\xi e^{i\vartheta} = x$ ist, so läßt sich diese Formel noch etwas einfacher schreiben:

$$(27.)\quad \Phi(\beta+n,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{1}{2}x} (xn)^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} e^{2\sqrt{xn}} \cdot \left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Unter den Potenzen und Wurzeln sind dabei die Hauptwerte zu verstehen; reelle negative Werte von x sind ausgeschlossen.

§ 4.

Jetzt wenden wir uns zu dem Fall, daß x reell und negativ ist; es sei also $x = -\xi$. Dann ist der frühere Integrationsweg L_1 nicht zu gebrauchen, weil auf dem Kreis K der Ausdruck

$$\left|e^{\frac{x}{t}+t}\right| = e^{\Re\left(-\frac{\xi}{t}+t\right)}$$

konstant gleich 1 ist. Die Kurve

$$\left|e^{\frac{x}{t}+t}\right| = 1$$

zerfällt jetzt in den Kreis K und die imaginäre Achse. Ihre Doppelpunkte sind also $t = \pm i\sqrt{\xi}$. Wir werden daher in (7.) für L_1 einen Weg wählen, der durch diese Doppelpunkte geht, und auf dem sonst überall

$$\left|e^{\frac{x}{t}+t}\right| < 1$$

ist. Ein solcher Weg ergibt sich beispielsweise, indem man

$$(28.)\qquad t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi}\,(1+iv)^2$$

setzt und v die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. Der so gewählte Weg L_1 ist eine Parabel, deren Achse die reelle Achse ist, und deren Scheitel im Punkt $t = \frac{1}{2}\sqrt{\xi}$ liegt. Diese Wahl des Weges L_1 ist offenbar zulässig; Formel (7.) geht dadurch über in:

$$\Phi(\beta+n,\gamma;-\xi) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{2\pi i\,\Gamma(\beta+n)}\, n^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (\tfrac{1}{2}\sqrt{\xi})^{1-\gamma}\, 2i$$

$$\times \int_{\infty}^{\infty} (1+iv)^{1-2\gamma} \left[1-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2\right]^{\gamma-\beta-1-n} e^{-2\sqrt{n\xi}\,(1+iv)^{-2}}\, dv;$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$(29.)\quad \Phi(\beta+n,\gamma;-\xi)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\right)^{1-\gamma}(U_n+V_n),$$

wobei

$$(30.\quad U_n=\int_0^\infty (1+iv)^{1-2\gamma}\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2\right]^{\gamma-\beta-1-n} e^{-2\sqrt{\xi n}\,(1+iv)^{-2}}\,dv$$

ist, während V_n aus U_n hervorgeht, indem man i durch $-i$ ersetzt.

Das Integral U_n zerlegen wir in

$$(31.)\qquad U_n=\int_0^\infty=\int_0^2+\int_2^\infty.$$

Wir wollen zuerst das letzte Integral abschätzen. Für $v\geqq 2$ ist, wenn

$$1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2=1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(v^2-1)-i\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,v=\varrho_n\,e^{-i\alpha_n}$$

gesetzt wird und n genügend groß ist:

$$\varrho_n>1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(v^2-1)>1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,v^2\begin{cases}>\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,v^2\\ \geqq 1+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\xi}{n}}>e^{\sqrt{\frac{\xi}{n}}},\end{cases}$$

$$\operatorname{tang}\alpha_n=\frac{v\sqrt{\frac{\xi}{n}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}(v^2-1)}=\frac{2}{v+\frac{1}{v}(2\sqrt{\frac{n}{\xi}}-1)}\begin{cases}>0\\ <\frac{2}{v}\leqq 1,\end{cases}$$

also $0<\alpha_n<\frac{\pi}{4}$. Daraus folgt für genügend große Werte von n:

$$\left|\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2\right]^{\gamma-\beta-1-n}\right|=\varrho_n^{\Re(\gamma-\beta)-1-n}\cdot e^{-\alpha_n\Re(i\gamma-i\beta)}$$

$$<\varrho_n^{-2-|\gamma|-\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi}{4}|\gamma-\beta|}<\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,v^2\right)^{-2-|\gamma|}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\xi n}}e^{\frac{\pi}{4}|\gamma-\beta|}$$

$$<e^{-\frac{1}{3}\sqrt{\xi n}}\cdot\frac{1}{v^{4+2|\gamma|}}.$$

Ferner ist

$$\left|e^{-2\sqrt{\xi n}\,(1+iv)^{-2}}\right|=e^{2\sqrt{\xi n}\,\frac{v^2-1}{(v^2+1)^2}}<e^{\frac{1}{4}\sqrt{\xi n}},$$

und endlich

$$|(1+iv)^{1-2\gamma}|<C\,v^{1+2|\gamma|},$$

wo C von v nicht abhängt. Das letzte Integral in Formel (31.) ist hiernach absolut kleiner als

$$\int_2^\infty C v^{1+2|\gamma|}\, e^{-\frac{1}{8}\sqrt{\xi n}}\, \frac{1}{v^{4+2|\gamma|}}\, e^{\frac{1}{4}\sqrt{\xi n}}\, dv = O\left(e^{-\frac{1}{12}\sqrt{\xi n}}\right),$$

und aus (31.) folgt somit:

$$(32.)\quad U_n = \int_0^2 (1+iv)^{1-2\gamma}\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2\right]^{\gamma-\beta-1-n} e^{-2\sqrt{\xi n}\,(1+iv)^{-2}}\, dv + O\left(e^{-\frac{1}{12}\sqrt{\xi n}}\right).$$

Auf den Integranden wenden wir nun wieder die Formel (10.) an. Nach dieser ist mit leicht ersichtlicher Änderung der Bezeichnung:

$$\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{n}}\,(1+iv)^2\right]^{\gamma-\beta-1-n} = e^{\frac{1}{2}\sqrt{\xi n}\,(1+iv)^2}\, e^{\frac{1}{8}\xi(1+iv)^4}\left(\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{\Omega_\lambda(v)}{\sqrt{n^\lambda}} + \frac{R_k(n,v)}{\sqrt{n^{k+1}}}\right),$$

wo analog zu (9.) wieder $\Omega_0(v)=1$; da

$$|t| = \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi}\,|1+iv|^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi}\,(1+v^2) \leqq \tfrac{5}{2}\sqrt{\xi}$$

ist, so gilt für den Rest R_k nach (13.) die Abschätzung

$$|R_k(n,v)| \leqq \Psi_k\left(\tfrac{5}{2}\sqrt{\xi}\right).$$

Damit ergibt sich:

$$(33.)\quad \begin{cases} U_n = \sum_{\lambda=0}^{k}\frac{1}{\sqrt{n^\lambda}}\int_0^2 (1+iv)^{1-2\gamma}\, e^{\frac{1}{8}\xi(1+iv)^4}\,\Omega_\lambda(v)\, e^{\left(\frac{(1+iv)^2}{2}-\frac{2}{(1+iv)^2}\right)\sqrt{\xi n}}\, dv \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{n^{k+1}}}\int_0^2 (1+iv)^{1-2\gamma}\, e^{\frac{1}{8}\xi(1+iv)^4}\, R_k(n,v)\, e^{\left(\frac{(1+iv)^2}{2}-\frac{2}{(1+iv)^2}\right)\sqrt{\xi n}}\, dv + O\left(e^{-\frac{1}{12}\sqrt{\xi n}}\right). \end{cases}$$

Da die Funktion

$$(34.)\qquad \Re\left(\frac{(1+iv)^2}{2}-\frac{2}{(1+iv)^2}\right) = -\frac{v^2+3}{2}\left(\frac{v^2-1}{v^2+1}\right)^2$$

stets $\leqq 0$ ist, bleibt das letzte hier auftretende Integral unter einer von n unabhängigen Schranke. In dem Integral unter der Summe setzen wir, da die Funktion (34.) ihr Maximum für $v=1$ annimmt*), $v=1+z$, wodurch sich ergibt:

$$(35.)\quad U_n = e^{2i\sqrt{\xi n}}\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{1}{\sqrt{n^\lambda}}\int_{-1}^{1}(1+i+iz)^{1-2\gamma}\, e^{\frac{1}{8}\xi(1+i+iz)^4}\,\Omega_\lambda(1+z)\,\varphi(z)^{\sqrt{\xi n}}\, dz + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{k+1}}}\right)$$

mit

$$(36.)\quad \log\varphi(z) = \frac{(1+i+iz)^2}{2} - \frac{2}{(1+i+iz)^2} - 2i = -2z^2 + b_1 z^3 + \cdots.$$

Das hier auftretende Integral ist nach den a. a. O. gewonnenen Resultaten asymptotisch gleich einer Reihe der Form

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{\nu,\lambda}\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi n}}\right)^{\frac{1+\nu}{2}};$$

---

*) Was vorauszusehen war, da dem Wert $v=1$ nach (28.) der Doppelpunkt $t = i\sqrt{\xi}$ entspricht.

dabei ist

$$Q_{0,\lambda} = (e^{i\omega_2} - e^{i\omega_1})\,(1+i)^{1-2\gamma}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, \Omega_\lambda(1)\, \Gamma(\tfrac{1}{2}),$$
$$\omega_1 = \pi,\ \omega_2 = 0.$$

Daher, weil $1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$ ist,

$$Q_{0,\lambda} = \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{3}{2}-\gamma}\, e^{i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, \Omega_\lambda(1),$$

und also insbesondere

(37). $$Q_{0,0} = \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{3}{2}-\gamma}\, e^{i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}.$$

Von den übrigen Koeffizienten $Q_{\nu,\lambda}$ bemerken wir nur, daß für ungerade Werte von ν wieder $Q_{\nu,\lambda} = 0$ ist. Die asymptotische Reihe für das Integral in (35.) ist demnach folgende:

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu,\lambda}\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi n}}\right)^{\frac{1}{2}+\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Q_{2\nu,\lambda}}{(2\sqrt{\xi n})^{\nu}}.$$

Das Integral ist also insbesondere gleich

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}}\left[\sum_{\nu=0}^{k-\lambda} \frac{Q_{2\nu,\lambda}}{(2\sqrt{\xi n})^{\nu}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{\,k-\lambda+1}}\right)\right].$$

Setzt man das in (35.) ein, so folgt nach leichter Umordnung der Glieder:

$$U_n = e^{2i\sqrt{\xi n}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[\sum_{\nu=0}^{k} \frac{\sum_{\lambda=0}^{\nu} Q_{2\lambda,\nu-\lambda}\,(2\sqrt{\xi})^{-\lambda}}{\sqrt{n}^{\nu}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{\,k+1}}\right)\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{\,k+1}}\right).$$

Zieht man hier das zweite Ordnungssymbol unter die eckige Klammer, so kann das erste offenbar wegbleiben, und wenn noch zur Abkürzung

(38.) $$\sum_{\lambda=0}^{\nu} Q_{2\lambda,\nu-\lambda}\,(2\sqrt{\xi})^{-\lambda} = q_\nu$$

gesetzt wird, erhält man:

$$U_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}}\, e^{2i\sqrt{\xi n}}\cdot\left[\sum_{\nu=0}^{k} \frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{\,k+1}}\right)\right].$$

Oder, da dies für beliebig große Werte von k gilt:

(39.) $$U_n \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}}\, e^{2i\sqrt{\xi n}}\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}}.$$

Der erste Koeffizient q_0 ist dabei nach (38.) gleich $Q_{0,0}$; also nach (37.)

(40.) $$q_0 = \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{3}{2}-\gamma}\, e^{i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}.$$

Genau ebenso ergibt sich:

(41.) $$V_n \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\xi^{-\frac{1}{4}}\, n^{-\frac{1}{4}}\, e^{-2i\sqrt{\xi n}}\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\sqrt{n}^{\nu}},$$

$$(42.) \qquad q_0' = \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{3}{2}-\gamma}\, e^{-i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}.$$

Setzt man diese Resultate in (29.) ein, so erhält man schließlich:

$$\Phi(\beta+n,\gamma;-\xi) \backsim \frac{\Gamma(\gamma)}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}\, 2^{\gamma-\frac{5}{2}}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, n^{\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}} \cdot \left(e^{2i\sqrt{\xi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\sqrt{n^\nu}} + e^{-2i\sqrt{\xi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu'}{\sqrt{n^\nu}} \right),$$

oder wenn man den Gammaquotienten wieder durch seine asymptotische Reihe ersetzt:

$$(43.) \quad \Phi(\beta+n,\gamma;-\xi) \backsim \frac{\Gamma(\gamma)}{\pi}\, 2^{\gamma-\frac{5}{2}}\, (\xi n)^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(e^{2i\sqrt{\xi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_\nu}{\sqrt{n^\nu}} + e^{-2i\sqrt{\xi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_\nu}{\sqrt{n^\nu}} \right).$$

Dabei ist $p_0 = q_0$, $p_0' = q_0'$. Wenn man also die Reihen nach dem ersten Glied abbricht und die obigen Werte für q_0, q_0' einsetzt, erhält man insbesondere:

$$(44.) \quad \begin{cases} \Phi(\beta+n,\gamma;-\xi) = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, e^{i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, (\xi n)^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{2i\sqrt{\xi n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, e^{-i\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, (\xi n)^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{-2i\sqrt{\xi n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \end{cases}$$

Statt dessen kann man offenbar auch schreiben:

$$(45). \quad \Phi(\beta+n,\gamma;-\xi) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, (\xi n)^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} \left[\cos\left(2\sqrt{\xi n} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\gamma}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

§ 5.

Ist x eine von Null verschiedene Konstante, so hat die Funktion von z

$$(1-z)^{-\beta}\, e^{\frac{x}{1-z}}$$

im Endlichen die singuläre Stelle $z = 1$, und zwar ist das eine *wesentlich singuläre* Stelle. Entwickelt man nach Potenzen von z:

$$(46.) \qquad (1-z)^{-\beta}\, e^{\frac{x}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

so hat die Reihe den Konvergenzradius 1. Das Verhalten der Koeffizienten c_n für große Werte von n habe ich in einer früheren Arbeit untersucht*); die damaligen Resultate können aber auf Grund der heutigen Entwicklungen bedeutend verschärft werden. Für den Koeffizienten c_n findet man nämlich, wenn man in der Formel

$$(1-z)^{-\beta}\, e^{\frac{x}{1-z}} = (1-z)^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{1-z}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{-\beta-\nu}}{\nu!}\, x^\nu$$

---

*) Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 22,

rechts die einzelnen Terme nach Potenzen von z entwickelt und dann den *Weierstraß*schen Doppelreihensatz anwendet, den Ausdruck

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta+\nu)(\beta+\nu+1)\cdots(\beta+\nu+n-1)}{n!\,\nu!}\, x\,.$$

Also, wenn β von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden ist:

$$(47.) \qquad c_n = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}\, \Phi(\beta+n, \beta; x);$$

dagegen, wenn $\beta = -p$, wo p eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ ist, für $n \geqq p+1$:

$$(47^a.) \qquad c_n = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\, \Phi(n+1,\ p+2; x).$$

Nun besteht bekanntlich eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!} \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, n^{\beta-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{n^\nu}$$

mit $b_0 = 1$, sodaß insbesondere

$$\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, n^{\beta-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ist. Schließen wir also zunächst den Fall aus, daß x reell und negativ ist, so ergibt sich hiernach mit Benutzung von (47.) und (27.) für c_n der Wert

$$(48.) \qquad c_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\, e^{\frac{1}{2}x}\, n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{xn}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right];$$

nur für $\beta = -p$ folgt aus $(47^a.)$:

$$c_n = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\, \frac{\Gamma(p+2)}{2\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{1}{2}x}\, (x\,n)^{\frac{1}{4}-\frac{p+2}{2}}\, e^{2\sqrt{xn}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Setzt man aber hier für p den Wert $-\beta$ ein, so entsteht sofort wieder die Formel (48.), die somit für beliebige Werte von β gilt.

Ist $x = -\xi$ reell und negativ, so folgt analog mit Benutzung von (44.):

$$(48'.) \quad c_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\, e^{2i\sqrt{\xi n}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{-\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\, e^{-2i\sqrt{\xi n}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

wofür man in Analogie zu (45.) auch schreiben kann:

$$(48''.) \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}\left[\cos\left(2\sqrt{\xi n} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\beta}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Diese Formeln sind in Übereinstimmung mit den a. a. O. erhaltenen Resultaten. Der damals befolgte Weg war im Prinzip von dem heutigen nicht verschieden; jedoch wurde infolge weniger genauer Abschätzungen

nur ein Fehlerglied $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ an Stelle von $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ erhalten. Unsere jetzigen Untersuchungen gestatten aber in Wahrheit noch mehr; sie zeigen nämlich, daß für c_n eine asymptotische Entwicklung der folgenden Form besteht:

$$(49.) \qquad c_n \backsim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\, e^{\frac{1}{2}x}\, n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{xn}}\left(1+\frac{C_1}{\sqrt{n}}+\frac{C_2}{\sqrt{n^2}}+\frac{C_3}{\sqrt{n^3}}+\cdots\right),$$

mit einer entsprechenden Modifikation, falls x eine reelle negative Zahl ist.

Setzt man allgemeiner

$$(50.) \qquad (1-z)^{-\beta}\, \Phi\left(\beta,\gamma;\frac{x}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, z^n\,^*),$$

so findet man leicht:

$$d_n = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}\, \Phi(\beta+n,\gamma;x).$$

Aus (27.) folgt also, wenn x keine negative reelle Zahl ist:

$$(51.) \qquad d_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\, x^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{\frac{1}{2}x}\, n^{\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{xn}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right];$$

für $x=-\xi$, wo $\xi>0$, ist dagegen nach (44.)

$$(51'.) \quad \begin{cases} d_n = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{2i\sqrt{\xi n}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ \quad + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{-\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\, e^{-2i\sqrt{\xi n}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \end{cases}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(51.'') \quad d_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\, \xi^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi}\, n^{\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}}\left[\cos\left(2\sqrt{\xi n}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\gamma}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Weiterhin geht aus unseren Resultaten hervor, daß für d_n eine asymptotische Entwicklung der Form

$$(52.) \quad d_n \backsim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\, x^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\, e^{\frac{1}{2}x}\, n^{\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{xn}}\left(1+\frac{D_1}{\sqrt{n}}+\frac{D_2}{\sqrt{n^2}}+\frac{D_3}{\sqrt{n^3}}+\cdots\right)$$

besteht, mit einer entsprechenden Modifikation, falls x eine reelle negative Zahl ist.

---

*) Für $\gamma=\beta$ entsteht der vorige Fall, es wird $d_n=c_n$.

Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

In seiner Arbeit „Über allgemeine lineare Mittelbildungen“*) hat Herr *O. Toeplitz* darauf aufmerksam gemacht, daß die meisten der in der Reihentheorie vorkommenden Mittelbildungen sich als „zeilenfinite“ lineare Transformationen der Form

$$y_x = \sum_{\lambda=1}^{n_x} a_{x\lambda}\, x_\lambda \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

mit gegebenen Koeffizienten $a_{x\lambda}$ auffassen lassen, wobei verlangt wird, daß jede konvergente unendliche Zahlenfolge x_n in eine ebenfalls konvergente Folge y_n *mit demselben Grenzwert* übergehen soll. Die von Herrn *Toeplitz* in diesem Fall angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten $a_{x\lambda}$ gelten auch für die nicht zeilenfiniten linearen Transformationen

$$\text{(A.)} \qquad y_x = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{x\lambda}\, x_\lambda \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

von derselben Art (vgl. *Steinhaus*, a. a. O., S. 129). In der Reihentheorie hat man es aber häufig auch mit linearen Transformationen zu tun, an die weitergehende Forderungen gestellt werden, und zwar handelt es sich zumeist um zwei Arten von Operationen: erstens um solche, die jede konvergente Folge x_n in eine ebenfalls konvergente Folge y_n überführen

*) Prace matematyczno-fizyczne, Bd. 22 (1911), S. 113—119. — Vgl. auch *H. Steinhaus*, „Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy“, ebenda, S. 121—134.

(wobei nicht notwendig $\lim y_n = \lim x_n$ zu sein braucht), und zweitens um solche, bei denen allgemeiner jede beschränkte Folge x_n in eine konvergente Folge y_n übergeht. Je nachdem der erste oder der zweite Fall vorliegt, sage ich, die Substitution A sei *konvergenzerhaltend* oder *konvergenzerzeugend.* Eine konvergenzerhaltende Operation, bei der jedesmal $\lim y_n = \lim x_n$ wird, bezeichne ich als regulär*). Auf diesen Fall beziehen sich die Untersuchungen der Herren *Toeplitz* und *Steinhaus.*

In ähnlicher Weise, wie das Herrn *Toeplitz* für die regulären Transformationen gelungen ist, lassen sich auch für die allgemeineren konvergenzerhaltenden und konvergenzerzeugenden Operationen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, denen die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ zu genügen haben. Die Durchführung der Untersuchung bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten dar, die Ergebnisse, zu denen man gelangt, scheinen mir aber für die Theorie der unendlichen Reihen von erheblicher Wichtigkeit zu sein. Sie gestatten nicht nur, viele Betrachtungen nach einem einheitlichen Prinzip durchzuführen, sondern auch in fast allen Fällen zu entscheiden, ob die Bedingungen, die für die aufzustellenden Behauptungen angegeben werden und zumeist nur als hinreichend erscheinen, auch notwendig sind. Darunter fallen die meisten Untersuchungen über Mittelbildungen, über die Multiplikation unendlicher Reihen, aber auch scheinbar tiefer liegende Sätze, wie z. B. der *Abel*sche Stetigkeitssatz in der Theorie der Potenzreihen**) und die einfachste seiner Umkehrungen, der bekannte Satz des Herrn *Tauber.*

Es sei noch erwähnt, daß die hier behandelten Fragen viele Berührungspunkte mit den Untersuchungen über Integraloperationen der Form

$$y_\varkappa(r) = \int_a^b A_\varkappa(r, s)\, x(s)\, ds$$

aufweisen, die man den Herren *H. Lebesgue****) und *H. Hahn*†) verdankt.

*) Diese Bezeichnung habe ich schon in meiner Arbeit „Über die Äquivalenz der *Cesàro*schen und *Hölder*schen Mittelwerte", Math. Ann. Bd. 74 (1913), S. 447—458, benutzt.

**) Auf die Tatsache, daß der *Abel*sche Stetigkeitssatz in diesen Kreis von Betrachtungen hineingehört, hat schon Herr *Steinhaus* (a. a. O., S. 131) hingewiesen.

***) Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse (3) Bd. 1 (1910), S. 25—117.

†) „Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale", Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 93 (1916).

§ 1.

Die drei Hauptsätze.

Eine lineare Transformation A ist in erster Linie durch die unendliche Matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ der gegebenen Koeffizienten charakterisiert. Die Gleichungen (A.) schreibe ich wie üblich auch abgekürzt in der Form $(y) = A\,(x)$, wobei (x) und (y) als Zeichen für die unendlichen Zahlenfolgen der x_n und y_n erscheinen. Im Falle der Konvergenz bezeichne ich die Grenzwerte von (x) und (y) kurz mit x und y.

Hilfssatz. *Sind $a_1, a_2, \ldots$ gegebene reelle oder komplexe Konstanten, so ist die Reihe*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots \tag{1.}$$

dann und nur dann für jede konvergente Folge x_n konvergent, wenn die Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots \tag{2.}$$

absolut konvergiert.

Ist nämlich (2.) absolut konvergent, so konvergiert (1.) sogar für jede beschränkte Folge x_n. Nimmt man aber die Reihe (2.) als nicht absolut konvergent an, so setze man

$$s_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

und wähle

$$x_n = 0 \text{ oder } x_n = \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{1}{s_n},$$

je nachdem a_n gleich Null oder von Null verschieden ist. Dann wird $\lim x_n = 0$, während (1.) in die Reihe $\Sigma \frac{|a_n|}{s_n}$ übergeht, die nach einem bekannten Satz von *Abel* zugleich mit $\Sigma\,|a_n|$ divergiert.

Soll nun die lineare Transformation A konvergenzerzeugend oder auch nur konvergenzerhaltend sein, so muß für jedes $\varkappa$ die Reihe $\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda$ konvergieren, sobald nur $\lim x_n$ existiert. Nach dem Hilfssatz kann dies nur dann eintreten, wenn die *Zeilenreihen*

$$a_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2} + \cdots$$

sämtlich absolut konvergent sind. *Diese Annahme soll im folgenden stets gemacht werden.* Ich setze noch

$$\sigma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}, \quad \zeta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}|$$

und bezeichne die Zahlen $\sigma_\varkappa$ als die *Zeilensummen* und die $\zeta_\varkappa$ als die

*Zeilennormen**). Das Hauptziel der Untersuchung bildet nun der Beweis der nachstehenden Sätze:

I. *Die lineare Transformation* $A = (a_{\varkappa\lambda})$ *ist dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jedes* λ *existiert der Grenzwert*

$$a_\lambda = \lim_{\varkappa=\infty} a_{\varkappa\lambda}, \tag{3.}$$

den ich den λ*-ten Kolonnengrenzwert nenne.*

2. *Die Zeilensummen* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *nähern sich einem endlichen Grenzwert* σ.

3. *Die Zeilennormen* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *liegen unterhalb einer endlichen Schranke.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Reihe

$$\alpha = a_1 + a_2 + \cdots \tag{4.}$$

absolut konvergent, und es wird für jede konvergente Folge x_n *mit dem Grenzwert* x

$$y = \lim_{\varkappa=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x_\lambda = (\sigma - \alpha) x + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots \tag{5.}$$

II. *Eine konvergenzerhaltende Operation A ist dann und nur dann regulär, wenn die Kolonnengrenzwerte* a_λ *sämtlich gleich* 0 *sind und der Grenzwert* σ *der Zeilensummen* $\sigma_\varkappa$ *den Wert* 1 *hat (Satz von Toeplitz).*

III. *Die lineare Transformation A ist dann und nur dann konvergenzerzeugend, wenn außer den drei Bedingungen des Satzes* I *noch folgende Bedingung erfüllt ist:*

4. *Die Reihen* $\sum_\lambda |a_{\varkappa\lambda}|$ *sind in bezug auf* $\varkappa$ *gleichmäßig konvergent, d. h. zu jedem positiven* ε *läßt sich eine allein von* ε *abhängende ganze Zahl* l *derart angeben, daß für alle Werte von* $\varkappa$

$$|a_{\varkappa,l+1}| + |a_{\varkappa,l+2}| + \cdots \leqq \varepsilon \tag{6.}$$

wird.

In diesem Falle ist für jede beschränkte Folge x_n

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x_\lambda = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots \tag{7.}$$

Ich werde auch noch zeigen, daß die Bedingung 4. sich auf die etwas einfachere Form bringen läßt:

4′. *Die Folge* $\zeta_1, \zeta_2 \ldots$ *der Zeilennormen muß konvergent und*

---

*) Bei anderen Betrachtungen empfiehlt es sich allerdings, die Zahlen $\sum |a_{\varkappa\lambda}|^2$ die Zeilennormen zu nennen.

$$\lim_{\varkappa=\infty} \zeta_\varkappa = \alpha' = |a_1| + |a_2| + \cdots \tag{8.}$$

sein.

§ 2.

Die Bedingungen der drei Hauptsätze sind hinreichend.

Dieser Beweis ist sehr leicht zu erbringen. Sind nämlich die Bedingungen 1. und 3. erfüllt und ist $\zeta_\varkappa \leqq M$, so wird für jedes λ

$$|a_{\varkappa 1}| + |a_{\varkappa 2}| + \cdots + |a_{\varkappa\lambda}| \leqq M.$$

Hält man λ fest und läßt $\varkappa$ über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\lambda| \leqq M.$$

Daher ist die Reihe (4.) absolut konvergent und zugleich erhält man

$$\alpha' = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_\lambda| \leqq M.$$

Es sei nun $x_1, x_2, \ldots$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Setzt man $x_\lambda = x + \xi_\lambda$ und führt die gewiß konvergenten Reihen

$$\eta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda,\ \eta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda\, \xi_\lambda$$

ein, so wird $\lim \eta_\varkappa = \eta$. Denn ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so bestimme man, was wegen $\lim \xi_\lambda = 0$ jedenfalls möglich ist, m derart, daß für $\lambda > m$

$$|\xi_\lambda| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

wird. Alsdann kann k so gewählt werden, daß für $\varkappa > k$

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{m} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda)\, \xi_\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Für $\varkappa > k$ ist dann

$$|\eta_\varkappa - \eta| \leqq \left| \sum_{\lambda=1}^{m} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda)\, \xi_\lambda \right| + \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} (|a_{\varkappa\lambda}| + |a_\lambda|)\, |\xi_\lambda| < \frac{\varepsilon}{3} + 2M.\ \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,$$

also in der Tat $\lim \eta_\varkappa = \eta$. Da ferner

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda = \sigma_\varkappa\, x + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda \tag{9.}$$

ist, und auf Grund der Bedingung 2. die Zahlen $\sigma_\varkappa$ den endlichen Grenzwert σ besitzen sollen, so wird

$$y = \lim_{\varkappa=\infty} y_\varkappa = \sigma x + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda\, \xi_\lambda = \sigma x + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda\, (x_\lambda - x),$$

was die zu beweisende Gleichung (5.) liefert.

Ist außerdem noch $a_\lambda = 0$ für alle λ und $\sigma = 1$, so wird $y = x$, die Transformation A ist also in diesem Fall regulär.

Nimmt man noch außer den Bedingungen 1.—3. auch die Bedingung 4. als erfüllt an, und genügt bei gegebenem ε die Zahl l den Ungleichungen (6.), so wird auch

$$(10.) \qquad |a_{l+1}| + |a_{l+2}| + \cdots \leqq \varepsilon.$$

Betrachtet man nun irgend eine beschränkte Zahlenfolge x_n und ist $|x_n| \leqq X$, so kann die Zahl k_1 so gewählt werden, daß für $\varkappa > k_1$

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{l} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda)\, x_\lambda \right| < \varepsilon$$

wird. Dann ist, wenn die Summe der gewiß konvergenten Reihe $\Sigma a_\lambda x_\lambda$ mit y bezeichnet wird, wegen (6.) und (10.) für $\varkappa > k_1$

$$|y_\varkappa - y| \leqq \left| \sum_{\lambda=1}^{l} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda)\, x_\lambda \right| + \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} (|a_{\varkappa\lambda}| + |a_\lambda|)\, |x_\lambda| < \varepsilon + 2X\varepsilon.$$

Daher ist, wie behauptet, y der Grenzwert der Folge $(y) = A(x)$.

Auch daß die Bedingungen 4. und 4′. dasselbe besagen, ist leicht zu erkennen. Um aus der Voraussetzung 4. die Richtigkeit der Gleichung (8.) zu folgern, schließt man in bekannter Weise folgendermaßen: Ist ε gegeben und genügt l den Ungleichungen (6.), so bestimme man k_2 derart, daß für $\varkappa > k_2$

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \big| |a_{\varkappa\lambda}| - |a_\lambda| \big| < \varepsilon$$

wird. Dann ist für $\varkappa > k_2$

$$|\zeta_\varkappa - \alpha'| \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \big| |a_{\varkappa\lambda}| - |a_\lambda| \big| + \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} (|a_{\varkappa\lambda}| + |a_\lambda|) < \varepsilon + 2\varepsilon$$

und daher $\lim \zeta_\varkappa = \alpha'$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so bestimme man, wenn ε gegeben ist, eine Zahl r, für die

$$\sum_{\lambda=r+1}^{\infty} |a_\lambda| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, und wähle dann k_3 derart, daß für $\varkappa > k_3$ die Ungleichungen

$$\zeta_\varkappa - \alpha' < \frac{\varepsilon}{3},\ \sum_{\lambda=1}^{r} (|a_\lambda| - |a_{\varkappa\lambda}|) < \frac{\varepsilon}{3}$$

bestehen. Für $\varkappa > k_3$ ist alsdann

$$\sum_{\lambda=r+1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}| = (\zeta_\varkappa - \alpha') + \sum_{\lambda=1}^{r} (|a_\lambda| - |a_{\varkappa\lambda}|) + \sum_{\lambda=r+1}^{\infty} |a_\lambda| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wählt man noch außerdem, was gewiß möglich ist, die Zahl s so, daß für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k_3$

$$\sum_{\lambda=s+1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}| \leqq \varepsilon$$

wird, so bestehen, wenn l die größere der beiden Zahlen r und s ist, die Ungleichungen (6.) für alle Werte von $\varkappa$.

§ 3.

Beweis der Sätze I und II.

Um zu zeigen, daß die Bedingungen dieser beiden Sätze auch notwendig erfüllt sein müssen, empfiehlt es sich, einen etwas allgemeineren Satz zu beweisen:

IV. *Die lineare Transformation A führt dann und nur dann jede Nullfolge (x) in eine konvergente Folge $(y) = A(x)$ über, wenn die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ den Bedingungen* 1. *und* 3. *des Satzes* I *genügen.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ergibt sich aus dem in § 2 Bewiesenen unter Berücksichtigung der Gleichung (9.), daß, sobald $\lim x_\varkappa = 0$ ist,

$$\lim y_\varkappa = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$$

wird.

Weiß man umgekehrt, daß die Folge (y) für jede Nullfolge (x) konvergent ist, so wird speziell, wenn bei gegebenem λ die Zahl x_λ gleich 1 und alle übrigen x_μ gleich 0 gesetzt werden, $\lim x_\varkappa = 0$ und $y_\varkappa = a_{\varkappa\lambda}$. Daher muß der Grenzwert $\lim\limits_{\varkappa=\infty} a_{\varkappa\lambda} = a_\lambda$ für jedes λ existieren.

Wesentlich schwieriger ist es zu zeigen, daß auch die Bedingung 3. erfüllt sein muß.

Man erkennt leicht, daß es genügt, den Beweis nur für reelle Zahlen $a_{\varkappa\lambda}$ zu erbringen. Ich nehme also an, A sei eine reelle lineare Transformation, die jede (reelle) Nullfolge (x) in eine konvergente Folge (y) überführt, und unterscheide dann mehrere Fälle:

1. *Die Grenzwerte $a_1, a_2, \ldots$ sind sämtlich gleich Null**).

Dann wird bei gegebenem n die Summe $|a_{\varkappa 1}| + \cdots + |a_{\varkappa n}|$ kleiner als jede vorgeschriebene positive Zahl, sobald nur $\varkappa$ groß genug gewählt wird. Liegen nun die Zeilennormen $\zeta_\varkappa$ nicht unterhalb einer endlichen Schranke, so wähle man m_1 derart, daß $\zeta_{m_1} > 1$ wird. Zu dieser Zahl bestimme man eine Zahl n_1, für die

$$|a_{m_1, n_1+1}| + |a_{m_1, n_1+2}| + \cdots < 1$$

wird. Nun wähle ich, was jedenfalls möglich ist, eine Zahl m_2, die den Bedingungen $\zeta_{m_2} > 2^2$ und

*) In diesem Fall unterscheidet sich die Betrachtung nur wenig von der *Toeplitz*schen.

$$|a_{m_2,1}| + \cdots + |a_{m_2,n_1}| < 1$$

genügt, und kann dann durch passende Wahl von n_2 erreichen, daß

$$|a_{m_2,n_1+n_2+1}| + |a_{m_2,n_1+n_2+2}| + \cdots < 1$$

wird. Indem ich in dieser Weise fortfahre, erhalte ich zwei Folgen positiver ganzer Zahlen m_ν und n_ν, die folgender Bedingung genügen: Setzt man $n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu = q_\nu$, so wird für jedes ν

(11.) $$\zeta_{m_\nu} > \nu^2, \quad \sum_\alpha |a_{m_\nu,\alpha}| < 1, \quad \sum_\gamma |a_{m_\nu,\gamma}| < 1. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq q_{\nu-1},\ \gamma > q_\nu)$$

Dann ist gewiß

(12.) $$\sum_\beta |a_{m_\nu,\beta}| > \nu^2 - 2. \qquad (q_{\nu-1} < \beta \leqq q_\nu)$$

Man setze nun für $\lambda \leqq q_1$

$$x_\lambda = \operatorname{sign} a_{m_\nu,\lambda}$$

und allgemein für $q_{\nu-1} < \lambda \leqq q_\nu$

$$x_\lambda = \frac{1}{\nu} \operatorname{sign} a_{m_\nu,\lambda}.$$

Die Zahlen x_λ konvergieren dann mit wachsendem λ gegen Null, die zugehörige Folge (y) ist aber nicht konvergent. Denn aus (11.) und (12.) folgt

$$y_{m_\nu} = \sum_\alpha a_{m_\nu,\alpha} x_\alpha + \sum_\beta a_{m_\nu,\beta} x_\beta + \sum_\gamma a_{m_\nu,\gamma} x_\gamma$$

$$\geqq -\sum_\alpha |a_{m_\nu,\alpha}| + \frac{1}{\nu} \sum_\beta |a_{m_\nu,\beta}| - \sum_\gamma |a_{m_\nu,\gamma}| > \frac{\nu^2 - 2}{\nu} - 2.$$

Daher enthält die Folge (y) eine Teilfolge, deren Zahlen über alle Grenzen wachsen.

2. *Die Zahlen a_λ sind nicht sämtlich gleich Null und die Reihe Σa_λ ist absolut konvergent.*

Man betrachte dann die lineare Substitution

$$y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda) x_\lambda = y_\varkappa - \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda x_\lambda.$$

Diese Operation führt ebenso wie A jede Nullfolge (x) in eine konvergente Folge (y') über, sie genügt aber den Bedingungen des ersten Falles. Nach dem bereits Bewiesenen liegen daher die Summen

$$\zeta'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda|$$

unterhalb einer endlichen Schranke, und da $\zeta_\varkappa \leqq \zeta'_\varkappa + \Sigma |a_\lambda|$ ist, so gilt dasselbe auch für die $\zeta_\varkappa$.

3. *Die Zahlen a_λ sind sämtlich positiv und die Reihe Σa_λ ist divergent.*

Für je zwei Zahlen λ und $\mu > \lambda$ läßt sich dann k so wählen, daß für $\varkappa > k$ die Größen $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa\lambda}$ sämtlich positiv werden und außerdem

$$a_{\varkappa,\lambda+1} + a_{\varkappa,\lambda+2} + \cdots + a_{\varkappa,\mu} > \frac{1}{2}\,(a_{\lambda+1} + a_{\lambda+2} + \cdots + a_\mu)$$

wird. Um nun eine Nullfolge (x) zu erhalten, für welche die Folge (y) divergent wird, wähle ich eine ganze Zahl n_1 derart, daß $a_1 + \cdots + a_{n_1} > 1$ wird, und bestimme sodann eine Zahl m_1, für die

$$a_{m_1,1} + a_{m_1,2} + \cdots + a_{m_1,n_1} > \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) > \frac{1}{2}$$

wird. Nun wähle ich eine Zahl p_1, die der Bedingung

$$\sum_\lambda |a_{m_1,\lambda}| < 1 \qquad (\lambda = n_1 + p_1 + 1,\ n_1 + p_1 + 2 \ldots)$$

genügt. Dann läßt sich n_2 so bestimmen, daß

$$a_{n_1+p_1+1} + a_{n_1+p_1+2} + \cdots + a_{n_1+p_1+n_2} > 2^2$$

ausfällt, ferner eine Zahl m_2 wählen, für die $a_{m_2,1}, a_{m_2,2}, \ldots, a_{m_2,n_1+p_1}$ positiv werden und außerdem

$$a_{m_2,n_1+p_1+1} + a_{m_2,n_1+p_1+2} + \cdots + a_{m_2,n_1+p_1+n_2} > \frac{1}{2}\cdot 2^2$$

gilt. Zu dieser Zahl m_2 kann ich dann p_2 so wählen, daß

$$\sum_\mu |a_{m_2,\mu}| < 1 \qquad (\mu = n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + 1, \ldots$$

wird. Indem ich in dieser Weise fortfahre, erhalte ich drei Folgen positiver ganzer Zahlen m_ν, n_ν und p_ν, die für jedes ν folgenden Ungleichungen genügen, wobei $r_\nu = n_1 + p_1 + \cdots + n_\nu + p_\nu$ zu setzen ist:

$$a_{m_\nu,\alpha} > 0,\ \sum_\beta a_{m_\nu,\beta} > \frac{\nu^2}{2},\ \sum_\gamma |a_{m_\nu,\gamma}| < 1,\ (1 \leqq \alpha \leqq r_{\nu-1},\ r_{\nu-1} < \beta \leqq r_{\nu-1} + n_\nu,\ \gamma > r_\nu).$$

Nun setze ich die ersten n_1 Zahlen x_λ gleich 1, die folgenden p_1 gleich 0, die nächsten n_2 gleich $\frac{1}{2}$, die darauf folgenden p_2 gleich 0 usw. Dann wird

$$y_{m_\nu} = \sum_\alpha a_{m_\nu,\alpha}\, x_\alpha + \sum_\beta a_{m_\nu,\beta}\, x_\beta + \sum_\gamma a_{m_\nu,\gamma}\, x_\gamma$$

$$> 0 + \frac{1}{\nu}\sum_\beta a_{m_\nu,\beta} - \sum_\gamma |a_{m_\nu,\gamma}| > \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu^2}{2} - 1.$$

Daher ist die Folge (y) gewiß nicht konvergent, während $\lim x_\lambda = 0$ ist.

4. *Die Zahlen a_λ sind beliebig und die Reihe $\Sigma |a_\lambda|$ ist divergent.* Sind dann die Zahlen

$$a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$$

positiv und

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$$

negativ, so betrachte man die beiden linearen Substitutionen

$$y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa,m_\lambda}\, x'_\lambda,\quad y''_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-a_{\varkappa,n_\lambda})\, x''_\lambda,$$

die etwa mit A' und A'' bezeichnet werden mögen. Führt nun A jede Nullfolge in eine konvergente Folge über, so müssen auch A' und A'' diese Eigenschaft haben. Denn würde z. B. der Nullfolge (x') eine divergente Folge $(y') = A'(x')$ entsprechen, so setze man

$$x_{m_1} = x'_1,\ x_{m_2} = x'_2, \ldots$$

und alle übrigen x_λ gleich Null. Die so entstehende Folge (x) ist dann eine Nullfolge, die durch A in die divergente Folge $(y) = (y')$ übergeht. Da nun $\Sigma |a_\lambda|$ divergent sein soll, so sind bei mindestens einer der Operationen A' und A'' die Voraussetzungen des dritten Falles erfüllt, der, wie wir gesehen haben, nicht in Betracht kommt.

Es kann also nur einer der beiden ersten Fälle eintreten, und in diesen Fällen ergab sich, daß die Zahlen $\zeta_\varkappa$ nach oben beschränkt sein müssen. Damit ist der Satz IV vollständig bewiesen.

Der Satz I ergibt sich nun unmittelbar. Denn ist A eine konvergenzerhaltende Operation, so geht speziell auch jede Nullfolge (x) in eine konvergente Folge $A(x)$ über. Daher muß A wegen IV den Bedingungen 1. und 3. des Satzes I genügen. Betrachtet man noch die Folge

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1, \ldots, \tag{13.}$$

für die $y_\varkappa = \sigma_\varkappa$ wird, so erkennt man, daß auch die Bedingung 2. erfüllt sein muß.

Verlangt man noch, daß A regulär sein, d. h. den Grenzwert jeder konvergenten Folge (x) ungeändert lassen soll, so lehrt die Betrachtung der Folge (13.) und der Nullfolgen

$$x_\lambda = 1,\ x_\mu = 0, \qquad (\mu \neq \lambda)$$

daß

$$\sigma = \lim_{\varkappa=\infty} \sigma_\varkappa = 1,\ a_\lambda = \lim_{\varkappa=\infty} a_{\varkappa\lambda} = 0$$

sein muß. Dies liefert den Satz II.

Aus dem Satz I ergibt sich unmittelbar als wichtige Folgerung:

V. *Eine konvergenzerhaltende lineare Transformation führt jede beschränkte Folge (x) in eine ebenfalls beschränkte Folge (y) über.*

§ 4.

Beweis des Satzes III.

Da eine konvergenzerzeugende Substitution $A = (a_{\varkappa\lambda})$ zugleich auch konvergenzerhaltend ist, so muß sie gewiß den Bedingungen 1.—3. des Satzes I genügen. Wir haben nur zu zeigen, daß, wenn die Bedingung

4. nicht erfüllt ist, eine beschränkte Folge (x) angegeben werden kann, für welche die Folge $(y) = A(x)$ divergent ausfällt. Es genügt allein den Fall zu behandeln, daß die Zahlen a_λ sämtlich verschwinden. Denn trifft das nicht zu, so betrachte man an Stelle von A die lineare Transformation

$$(B.) \qquad y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\varkappa\lambda} - a_\lambda)\, x_\lambda.$$

Da $\Sigma |a_\lambda|$ nach Satz I konvergieren muß und daher auch $\Sigma a_\lambda x_\lambda$ für jede beschränkte Folge (x) konvergent ist, so ist zugleich mit A auch B konvergenzerzeugend. Bei dieser Operation sind aber die Kolonnengrenzwerte sämtlich gleich 0 und außerdem ist auch für B die Bedingung 4. nicht erfüllt, wenn sie für A nicht gilt.

Es sei also A eine konvergenzerzeugende Operation, für die die Kolonnengrenzwerte a_λ sämtlich verschwinden und die Bedingung 4. nicht erfüllt ist. Die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ dürfen wir wieder als reell annehmen. Es muß dann mindestens eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorhanden sein, für die, wie auch l gewählt werden mag, die Ungleichung

$$|a_{\varkappa,l+1}| + |a_{\varkappa,l+2}| + \cdots \leqq \varepsilon$$

nicht für alle Werte von $\varkappa$ besteht. Zu jedem l lassen sich dann auch unendlich viele $\varkappa$ angeben, für die

$$|a_{\varkappa,l+1}| + |a_{\varkappa,l+2}| + \cdots \geqq \varepsilon$$

wird. Ich wähle nun eine ganze Zahl m_1, die der Bedingung

$$|a_{m_1,1}| + |a_{m_1,2}| + \cdots \geqq \varepsilon$$

genügt, und bestimme n_1 derart, daß

$$|a_{m_1,n_1+1}| + |a_{m_1,n_1+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{4}$$

wird. Nun kann ich (wie aus der Voraussetzung $a_1 = a_2 = \cdots = 0$ folgt) eine Zahl $m_2 > m_1$ wählen, für die die beiden Ungleichungen

$$|a_{m_2,1}| + \cdots + |a_{m_2,n_1}| < \frac{\varepsilon}{4},\ |a_{m_2,n_1+1}| + |a_{m_2,n_1+2}| + \cdots \geqq \varepsilon$$

gelten, und dann eine Zahl n_2 bestimmen, für die

$$|a_{m_2,n_1+n_2+1}| + |a_{m_2,n_1+n_2+2} + | \cdots < \frac{\varepsilon}{4}$$

wird. Setze ich dieses Verfahren fort, so erhalte ich zwei Folgen positiver ganzer Zahlen m_ν, n_ν $(m_\nu < m_{\nu+1})$ von der Art, daß, wenn $n_1 + \cdots + n_\nu = s_\nu$ gesetzt wird, für jedes ν die Ungleichungen

$$\sum_{\alpha} |a_{m_\nu,\alpha}| < \frac{\varepsilon}{4},\ \sum_{\beta'} |a_{m_\nu,\beta'}| \geqq \varepsilon,\ \sum_{\gamma} |a_{m_\nu,\gamma}| < \frac{\varepsilon}{4}\ (1 \leqq \alpha \leqq s_{\nu-1},\ \beta' > s_{\nu-1},\ \gamma > s_\nu)$$

bestehen. Dann ist, wenn β die Zahlen $s_{\nu-1}+1, \ldots, s_\nu$ durchläuft,

$$\sum_\beta |a_{m_\nu,\beta}| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Ich setze nun für $\lambda = 1, 2, \ldots, n_1$

$$x_\lambda = \operatorname{sign} a_{m_1,\lambda}$$

und allgemein für $s_{\nu-1} < \lambda \leqq s_\nu$

$$x_\lambda = (-1)^{\nu-1} \operatorname{sign}\ a_{m_\nu,\lambda}.$$

Dann wird, wenn ν ungerade ist,

$$y_{m_\nu} = \sum_\alpha a_{m_\nu,\alpha} x_\alpha + \sum_\beta a_{m_\nu,\beta} x_\beta + \sum_\gamma a_{m_\nu,\gamma} x_\gamma > -\frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$$

und ebenso für ein gerades ν

$$-y_{m_\nu} > -\frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Die Folge (y) enthält dann eine divergente (oszillierende) Teilfolge und ist daher nicht konvergent, während doch die Folge (x) beschränkt ist.

Damit ist auch der Satz III vollständig bewiesen. Es hat sich sogar ergeben, daß die Bedingungen 1.—4. erfüllt sein müssen, sobald nur verlangt wird, daß A jede Folge (x), deren Zahlen einen der Werte 0, 1 oder -1 haben, in eine konvergente Folge überführen soll.

Aus dem Satze III ergibt sich insbesondere:

VI. *Es gibt keine reguläre lineare Substitution, die zugleich auch als konvergenzerzeugend zu bezeichnen ist**).

Denn ist A regulär, so müssen alle Kolonnengrenzwerte gleich 0 sein. Wäre nun A zugleich auch konvergenzerzeugend, so würde aus der Formel (7.) folgen, daß für jede konvergente Folge (x) mit dem Grenzwert x der Grenzwert y der Folge $A(x)$ gleich 0 ist. Dies widerspricht aber der Annahme, daß stets $y = x$ sein soll.

Noch eine andere Folgerung aus dem Satze III ist beachtenswert: Eine konvergenzerzeugende Substitution $A = (a_{\varkappa\lambda})$ behält diese Eigenschaft, wenn alle Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Dies folgt einfach aus der Tatsache, daß beim Übergang von A zu $B = (|a_{\varkappa\lambda}|)$ an Stelle der Zahlen a_λ und $\sigma_\varkappa$ die Zahlen $|a_\lambda|$ und $\zeta_\varkappa$ treten. Die Gleichung (8.) zeigt nun, daß B allen Bedingungen des Satzes III genügt.

---

*) Dieser Satz findet sich schon bei Herrn *Steinhaus* (a. a. O., S. 129).

§ 5.
Eine Ergänzung zum Satze I.

Es sei wieder

(14.) $$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

eine konvergenzerhaltende Substitution, und man setze wie früher

$$a_\lambda = \lim_{\varkappa=\infty} a_{\varkappa\lambda},\ \sigma = \lim_{\varkappa=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda},\ \alpha = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda.$$

Nimmt man die Folge (x) als nicht beschränkt an, so läßt sich im allgemeinen über das infinitäre Verhalten der Folge (y) nichts Bestimmtes aussagen. Bemerkenswert ist aber folgender Satz, der sich auf einen für die Anwendungen wichtigen Spezialfall bezieht:

VII. *Sind die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ der (konvergenzerhaltenden) Substitution* (14.) *nicht negative reelle Zahlen, so kann für reelle Zahlen x_λ, unter denen nur endlich viele negativ sein sollen, geschlossen werden, daß* $\lim y_\varkappa = \infty$ *ist, wenn entweder* $\sigma > \alpha$ *und* $\lim x_\lambda = \infty$ *ist, oder wenn die Reihe*

(15.) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$$

divergent ist.

Hierbei ist natürlich anzunehmen, daß die Reihen (14.) für die zu betrachtenden x_λ sämtlich konvergieren. Zu beachten ist ferner, daß in unserm Fall σ nicht kleiner als α sein kann. Denn für jedes n folgt aus

$$\sigma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} \geqq \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda},$$

indem man $\varkappa$ über alle Grenzen wachsen läßt,

$$\sigma \geqq \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda, \text{ d. h. } \sigma \geqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda.$$

Es sei nun zunächst $\sigma > \alpha$ und $\lim x_\lambda = \infty$. Es genügt den Fall zu behandeln, daß alle x_λ positiv sind. Denn trifft das nicht zu und ist $x_\lambda > 0$ für $\lambda > n$, so betrachte man an Stelle der $y_\varkappa$ die Ausdrücke

$$y_\varkappa^* = \sum_{\lambda=n+1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda.$$

Diese Gleichungen bestimmen wieder eine konvergenzerhaltende lineare Substitution, bei der an Stelle von σ und α die Zahlen

$$\sigma^* = \sigma - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),\ \alpha^* = \alpha - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

treten, so daß auch $\sigma^* > \alpha^*$ wird. Weiß man nun, daß $\lim y_\varkappa^* = \infty$ ist, so folgt dasselbe wegen

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda\, x_\lambda$$

auch für die $y_\varkappa$. — Es sei also $x_\lambda > 0$ für alle Werte von λ. Ist nun G eine gegebene positive Zahl, so wähle man l derart, daß für $\lambda > l$

$$x_\lambda > \frac{2G}{\sigma - \alpha}$$

wird. Dann wird

$$y_\varkappa \geqq \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda \geqq \frac{2G}{\sigma-\alpha} \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} = \frac{2G}{\sigma-\alpha}\,(\sigma_\varkappa - \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\varkappa\lambda}).$$

Der rechts stehende Ausdruck konvergiert mit wachsendem $\varkappa$ gegen

$$\frac{2G}{\sigma-\alpha}\,(\sigma - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda) \geqq \frac{2G}{\sigma-\alpha}\,(\sigma-\alpha) = 2G$$

und ist daher, wenn $\varkappa$ eine gewisse Zahl k übertrifft, größer als G. Zu jedem G läßt sich also k so wählen, daß $y_\varkappa > G$ für $\varkappa > k$ wird, d. h. es ist $\lim y_\varkappa = \infty$.

Sind ferner die Zahlen x_λ von einer gewissen Stelle an nicht negativ und ist die Reihe (15.) divergent, so bestimme man, wenn $G > 0$ gegeben ist, eine Zahl m derart, daß für $\lambda > m$

$$x_\lambda \geqq 0,\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m > 2G$$

wird. Dies ist jedenfalls möglich, weil alle a_λ nicht negativ sind, die Reihe (15.) im Falle der Divergenz also eigentlich divergent ist. Es wird dann

$$y_\varkappa \geqq \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda,$$

und da diese Summe mit wachsendem $\varkappa$ gegen $\sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda x_\lambda$ konvergiert, so ergibt sich wieder, daß $y_\varkappa$ von einer gewissen Stelle an größer als G, also $\lim y_\varkappa = \infty$ ist.

Zu bemerken ist noch, daß, wenn die Reihe (15.) konvergent ist, im Falle $\sigma = \alpha$ die Annahme $\lim x_\lambda = \infty$ noch keine bestimmten Schlüsse über das infinitäre Verhalten der $y_\varkappa$ zuläßt. Betrachtet man z. B. die Substitution

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=\varkappa}^{2\varkappa} \frac{x_\lambda}{\lambda^2},$$

bei der alle a_λ verschwinden und $\sigma = \alpha = 0$ ist, so wird $\lim y_\varkappa = \log 2$ für $x_\lambda = \lambda$ und $\lim y_\varkappa = \infty$ für $x_\lambda = \lambda^2$.

Ich erwähne auch noch, daß in dem hier betrachteten Falle $a_{\varkappa\lambda} \geqq 0$ die Bedingung $\sigma = \alpha$ mit der Bedingung 4′. des § 1 identisch ist. Durch $\sigma = \alpha$ wird also die Substitution (14.) als eine konvergenzerzeugende Operation charakterisiert.

§ 6.

Gruppeneigenschaften der konvergenzerhaltenden Transformationen.

Sind $A = (a_{\varkappa\lambda})$ und $B = (b_{\varkappa\lambda})$ zwei unendliche Matrizen und sind die Reihen

$$p_{\varkappa\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\nu}\, b_{\nu\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots) \tag{16.}$$

sämtlich konvergent, so bezeichne man wie üblich die Matrix $(p_{\varkappa\lambda})$ mit AB. Nimmt man insbesondere an, daß A und B konvergenzerhaltende Substitutionen sind, so sind die Reihen (16.), wie aus dem Satze I folgt, sogar absolut konvergent, das Produkt AB hat demnach einen Sinn. Man kann auch leicht direkt zeigen, daß AB den Bedingungen des Satzes I genügt, also wieder konvergenzerhaltend ist. Dies folgt aber einfacher aus dem präziseren Satz:

VIII. *Sind A und B zwei konvergenzerhaltende lineare Substitutionen, so ist für jede beschränkte Folge (x)*

$$AB\,(x) = A(B\,(x)). \tag{17.}$$

Oder ausführlicher: Setzt man

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda\,, \quad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, y_\lambda,$$

so wird

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda.$$

Diese Gleichung besagt nämlich nur, daß

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\varkappa\nu}\, b_{\nu\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\varkappa\nu} \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\nu\lambda}\, x_\lambda$$

ist. Daß diese Umordnung zulässig ist, folgt aber einfach aus der Tatsache, daß die Doppelreihe

$$\sum_{\lambda,\nu}^{\infty}{}_1\; a_{\varkappa\nu}\, b_{\nu\lambda}\, x_\lambda \tag{18.}$$

absolut konvergent ist. Denn ist

$$\zeta'_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |b_{\nu\lambda}| \leqq M, \quad |x_\lambda| \leqq X,$$

so wird für jedes n

$$\sum_{\lambda,\nu}^{n}{}_1 |a_{\varkappa\nu}\, b_{\nu\lambda}\, x_\lambda| \leqq X \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\varkappa\nu}| \left(\sum_{\lambda=1}^{n} |b_{\nu\lambda}|\right) \leqq X M \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\varkappa\nu}|.$$

Wählt man noch eine dritte konvergenzerhaltende Substitution $C = (c_{\varkappa\lambda})$ und setzt

$$q_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\varkappa\nu}\, c_{\nu\lambda},$$

so folgt aus VII für $x_\lambda = c_{\lambda\beta}$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\alpha\lambda}\, c_{\lambda\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\alpha\nu}\, q_{\nu\beta}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

Diese Gleichung besagt nur, daß

$$(AB)\,C = A\,(BC) \tag{19.}$$

ist. Für die Zusammensetzung der konvergenzerhaltenden Substitutionen gilt also das assoziative Gesetz. Die Koeffizienten der Substitution (19.), die auch mit ABC bezeichnet werden kann, sind nichts anderes als die absolut konvergenten Doppelreihen $\sum_{\mu,\nu} a_{\varkappa\mu}\, b_{\mu\nu}\, c_{\nu\lambda}$.

Aus (17.) folgt unmittelbar, daß das Produkt AB zweier konvergenzerhaltender Substitutionen von derselben Art ist. Zugleich ergibt sich, daß, wenn A und B regulär sind, auch AB regulär ist. Da ferner (17.) für jede beschränkte Folge (x) gilt, so erkennt man mit Rücksicht auf den Satz V ohne weiteres, daß AB eine konvergenzerzeugende Substitution wird, sobald nur mindestens eine der beiden (konvergenzerhaltenden) Substitutionen A und B diese Eigenschaft besitzt. Dieses Resultat kann mit Hilfe der Bezeichnungen der Gruppentheorie so ausgedrückt werden:

IX. *Die regulären und die konvergenzerzeugenden Substitutionen bilden zwei Untergruppen* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{Z}$ *innerhalb der Gruppe* $\mathfrak{H}$ *aller konvergenzerhaltenden Substitutionen. Diese Untergruppen besitzen (auf Grund des Satzes* VI) *kein Element gemeinsam. Die Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *der konvergenzerzeugenden Operationen ist eine invariante Untergruppe von* $\mathfrak{H}$.

Ich betone ausdrücklich, daß ich hierbei ein System $\mathfrak{S}$ von Operationen irgendwelcher Art, die zusammensetzbar sind und dem assoziativen Gesetz genügen, als eine Gruppe bezeichne, sobald nur das Produkt von je zwei Elementen von $\mathfrak{S}$ wieder in $\mathfrak{S}$ vorkommt. Es wird also nicht verlangt, daß die Inversen der Elemente von $\mathfrak{S}$ der Gruppe angehören sollen. Diese Inversen brauchen überhaupt nicht zu existieren, ebenso kann auch die identische Operation nicht vorhanden sein.

Es sei noch erwähnt, daß die zu einer konvergenzerhaltenden Transformation $A = (a_{\varkappa\lambda})$ gehörende Doppelreihe

$$A\,(x, y) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, y_\lambda$$

absolut konvergent ist, sobald nur die Reihe $\Sigma x_\varkappa$ absolut konvergiert und die Folge y_λ beschränkt ist. Dies ergibt sich ganz ebenso wie vorhin für die Doppelreihe (18.). Der Ausdruck $A(x, y)$ braucht aber nicht eine im *Hilbert*schen Sinne beschränkte Bilinearform zu sein. Schon allein die hierbei zu machende Voraussetzung, daß die Reihen $\sum_\varkappa |a_{\varkappa\lambda}|^2$ sämtlich konvergent und unterhalb einer endlichen Schranke gelegen sein sollen, braucht nicht erfüllt zu sein. Die Bilinearform $A(x, y)$ ist aber jedenfalls beschränkt, wenn je zwei Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ und $a_{\lambda\varkappa}$ entweder einander gleich oder konjugiert komplex sind. Denn in diesem Fall sind alle Reihen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}|, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}|$$

konvergent und unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Dies ist aber nach den Ergebnissen des § 2 meiner Arbeit „Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen“ *) eine hinreichende Bedingung für das Beschränktsein der Bilinearform $A(x, y)$.

§ 7.

Reversible Operationen.

Es sei wieder

$$(20.) \qquad y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

eine konvergenzerhaltende Substitution A. Eine (unendliche) Matrix $B = (b_{\varkappa\lambda})$ nenne ich eine zu A inverse Matrix $A^{(-1)}$, wenn ihre Elemente für alle Indizespaare $\varkappa, \lambda$ den Gleichungen

$$(21.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\varkappa\nu} b_{\nu\lambda} = e_{\varkappa\lambda}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\varkappa\nu} a_{\nu\lambda} = e_{\varkappa\lambda} \qquad (e_{\alpha\alpha} = 1, e_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta)$$

genügen, die wie üblich auch kürzer in der Form

$$(21'.) \qquad AB = E, \; BA = E$$

geschrieben werden können. Hierbei ist natürlich noch zu verlangen, daß die Reihen (21.) sämtlich konvergieren sollen.

Die Gleichungen (21'.) können entweder keine oder nur eine oder auch mehrere (unendlich viele) Lösungen besitzen. Es kann aber jedenfalls nicht mehr als eine inverse Matrix $A^{(-1)}$ geben, zu der wieder eine konvergenzerhaltende Substitution gehört. Denn sind B und B_1 zwei der-

*) Dieses Journal, Bd. 140 (1911), S. 1—28.

artige Lösungen von (21′.), so ergibt sich, weil für die Zusammensetzung der konvergenzerhaltenden Substitutionen das assoziative Gesetz gilt,

$$B_1 = B_1 E = B_1 (AB) = (B_1 A) B = EB = B.$$

Wir stellen nun folgende Definitionen auf:

Definition I. *Besitzt eine konvergenzerhaltende Substitution A eine Inverse, die wieder konvergenzerhaltend ist, so bezeichnen wir diese mit A^{-1} und nennen A eine algebraisch umkehrbare Substitution.*

Definition II. *Eine konvergenzerhaltende Substitution A bezeichnen wir als reversibel, wenn für je zwei Zahlenfolgen (x) und (y), zwischen denen die Beziehung $(y) = A(x)$ besteht (d. h. die Gleichungen (20.) gelten), aus der Konvergenz der Folge (y) auch die von (x) folgt. Ist außerdem A noch algebraisch umkehrbar, so soll A eine eigentlich reversible Substitution heißen.*

Ist nun A algebraisch umkehrbar und denkt man sich irgend eine *beschränkte* Folge (y) gegeben, die in der Form (20.) darstellbar ist, so ergibt sich *unter der Annahme, daß auch die Folge (x) beschränkt ist*, auf Grund des Satzes VIII

$$A^{-1}(y) = A^{-1}(A(x)) = E(x) = (x).$$

Umgekehrt genügt auch die Folge $(x) = A^{-1}(y)$ der Beziehung $(y) = A(x)$. Soll nun dies die einzige Lösung der Gleichungen (20.) sein, so muß offenbar noch verlangt werden, daß zu A überhaupt keine *Nullösung* gehören soll, d. h. keine Folge x_λ, die den Gleichungen

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

genügt, ohne aus lauter Nullen zu bestehen. In diesem und nur in diesem Falle ist A zugleich auch als reversibel zu bezeichnen. Wir können also sagen:

X. *Ist A eine konvergenzerhaltende Substitution, die algebraisch umkehrbar ist, so besitzen die Gleichungen (20.), wenn (y) eine gegebene beschränkte Folge ist, nur eine beschränkte Lösung (x), nämlich die Lösung $(x) = A^{-1}(y)$. Insbesondere gibt es keine beschränkte Nullösung. Eine algebraisch umkehrbare Substitution ist dann und nur dann reversibel, wenn sie überhaupt keine Nullösungen (also auch keine nicht beschränkten) besitzt.*

Man macht sich das Ganze an folgenden Beispielen klar:

1. Hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

und sind die Elemente $a_{\varkappa\varkappa}$ sämtlich von Null verschieden, so besitzt A nur eine Inverse $A^{(-1)}$, die nicht notwendig konvergenzerhaltend zu sein braucht. In jedem Fall gehört aber zu A keine Nullösung, und bei gegebenem (y) ist $(x) = A^{(-1)}(y)$ die einzige Lösung der Gleichungen (20.). Reversibel ist die Substitution dann und nur dann, wenn sie algebraisch umkehrbar ist, d. h. wenn die Inverse $A^{(-1)}$ den Bedingungen des Satzes I genügt. Die gewöhnliche Mittelbildung

$$y_\varkappa = \frac{1}{\varkappa}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa)$$

ist z. B. nicht reversibel, dagegen gilt das*), wenn α irgendeine Konstante mit positivem Realteil ist, für die Transformation

$$y_\varkappa = \alpha\, x_\varkappa + \frac{1-\alpha}{\varkappa}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa).$$

2. Die konvergenzerhaltende Substitution A habe die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{22.}$$

wobei die $a_{\varkappa\varkappa}$ wieder von Null verschieden sein sollen. Auch hier existiert nur eine Inverse $A^{(-1)}$, aber *selbst dann, wenn diese Inverse konvergenzerhaltend ist, braucht A nicht in unserem Sinne reversibel zu sein.* Wohl das einfachste Beispiel dieser Art liefert die Substitution

$$y_\varkappa = 2x_\varkappa - x_{\varkappa+1}, \tag{23.}$$

deren Inverse

$$x_\varkappa = \frac{y_\varkappa}{2} + \frac{y_{\varkappa+1}}{2^2} + \frac{y_{\varkappa+2}}{2^3} + \cdots \tag{24.}$$

ist. Beide Substitutionen (23.) und (24.) sind als regulär zu bezeichnen, zu (23.) gehört aber die Nullösung $x_\varkappa = 2^\varkappa$. Daher ist (23.) algebraisch

*) Vgl. meine in der Einleitung zitierte Arbeit. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes hat Frl. *M. Verbeek* in ihrer Inaug.-Dissertation „Über spezielle rekurrente Folgen und ihre Bedeutung für die Theorie der linearen Mittelbildungen und Kettenbrüche“ (Bonn, 1917) bewiesen.

umkehrbar, aber nicht reversibel. Dagegen besitzt (24.) keine Nullösung und stellt daher eine eigentlich reversible Operation dar.

3. Ein besonders interessantes Beispiel von der Form (22.) liefert die Substitution

$$y_x = x_x - c_x x_{x+2} - c_{x+1} x_{x+3} - \cdots, \qquad (x=1,2,\ldots) \tag{25.}$$

die mit dem Kettenbruch

$$1 + \frac{c_1|}{|1} + \frac{c_2|}{|1} + \cdots \tag{26.}$$

zusammenhängt. Nimmt man die Reihe

$$|c_1| + |c_2| + \cdots \tag{27.}$$

als konvergent an, so wird (25.) eine konvergenzerhaltende Operation. Setzt man für $m \leqq n$

$$D_n^{(m)} = \begin{vmatrix} 1, -1, 0, \ldots, 0, 0 \\ c_m, 1, -1, \ldots, 0, 0 \\ 0, c_{m+1}, 1, \ldots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \ldots 1, -1 \\ 0, 0, 0, \ldots \quad c_n, 1 \end{vmatrix}$$

und außerdem

$$D_k^{(k+1)} = D_k^{(k+2)} = 1, \; D_k^{(k+3)} = D_k^{(k+4)} = \cdots = 0, \qquad (k=-1,0,1,2,\ldots)$$

so kann die Inverse von (25.) in der Form

$$x_x = y_x + c_x D_{x-2}^{(x)} y_{x+2} + c_{x+1} D_{x-1}^{(x)} y_{x+3} + c_{x+2} D_x^{(x)} y_{x+4} + \cdots$$

geschrieben werden. Diese Substitution ist wieder konvergenzerhaltend. Dies folgt leicht aus dem Satze I mit Hilfe der bekannten Ungleichungen

$$|D_n^{(m)}| \leqq (1 + |c_m|)(1 + |c_{m+1}|) \cdots (1 + |c_n|).$$

Die Substitution (25.) ist also, sofern nur die Reihe (27.) konvergiert, algebraisch umkehrbar, *sie ist aber auch reversibel.* Eine Nullösung x_x von (25.) müßte nämlich den Gleichungen

$$x_1 - c_1 x_3 - c_2 x_4 \cdots = 0 \tag{28.}$$

und

$$0 = x_x - x_{x+1} - c_x x_{x+2} \qquad (x=1,2,\ldots)$$

genügen. Hieraus folgt aber, daß die x-te Partialsumme der Reihe (28.) nichts anderes als x_x ist. Es müßte also $\lim x_x = 0$ sein und dies würde, da (25.) als algebraisch umkehrbare Substitution jedenfalls keine beschränkte Nullösung aufweist, erfordern, daß alle x_x gleich 0 sind.

4. Eine allgemeine Klasse von linearen Substitutionen mit unendlich vielen Inversen stellen die sog. *Jacobi*schen Transformationen

$$y_x = c_{x-1}\, x_{x-1} + x_x - x_{x+1} \qquad (x = 1, 2, \ldots, x_0 = 0.) \tag{29.}$$

dar, deren Zusammenhang mit den Kettenbrüchen der Form (26.) bekannt ist. Konvergenzerhaltend ist (29.) dann und nur dann, wenn $\lim c_x$ einen endlichen Wert hat. Haben die Ausdrücke $D_n^{(m)}$ dieselbe Bedeutung wie vorhin, und nimmt man die c_x als von Null verschieden an, so erhält man alle zu (29.) inversen Substitutionen $A^{(-1)} = (b_{x\lambda})$, indem man

$$b_{11} = t,\ b_{1\mu} = (-1)^{\mu} \frac{D^{(2)}_{\mu-2} - D^{(1)}_{\mu-2}\, t}{c_1\, c_2 \ldots c_{\mu-1}},\ b_{x\lambda} = D^{(1)}_{x-2}\, b_{1\lambda} - D^{(\lambda+1)}_{x-2} \qquad (x, \mu > 1,\ \lambda \geqq 1)$$

setzt*). Hierbei kann der Parameter t einen beliebigen Wert haben. Jede Nullösung von (29.) hat ferner die Form

$$x_1 = \xi,\ x_\mu = \xi\, D^{(1)}_{\mu-2}.$$

Sind nun die Zahlen $|D_n^{(1)}|$ unterhalb einer endlichen Schranke gelegen (was z. B. eintritt, wenn die Reihe (27.) konvergent ist), so kann es gewiß keinen Wert von t geben, für den die Substitution $A^{(-1)}$ konvergenzerhaltend wird. Wählt man aber z. B. alle c_ν gleich 1, so wird $A^{(-1)}$, wie eine einfache Rechnung zeigt, nur dann eine konvergenzerhaltende Operation, wenn t den speziellen Wert

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

erhält. Die zugehörige Substitution $A^{(-1)}$ läßt sich dann in der einfachen Form

$$x_x = \sum_{\lambda=1}^{x} (-1)^{x-1} f_\lambda\, t^x\, x_\lambda + \sum_{\mu=x+1}^{\infty} f_x\, t^\mu\, y_\mu \tag{30.}$$

schreiben. Hierbei bedeuten $f_1, f_2, \ldots$ die sog. *Fibonacci*schen Zahlen

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Aber auch in diesem Fall ist die Substitution (29.) nur algebraisch umkehrbar, aber nicht reversibel. Dies folgt einfach daraus, daß die Zahlen $x_x = f_x$ eine Nullösung von (29.) liefern. Die inverse Substitution (30.) ist auch hier wieder als eigentlich reversibel zu bezeichnen.

Es bereitet keine Mühe, nach diesem Prinzip auch allgemeinere Klassen von konvergenzerhaltenden Substitutionen herzustellen, die algebraisch um-

*) Eine ähnliche Betrachtung findet sich bei *O. Toeplitz*, Zur Theorie der quadratischen Formen mit unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1910, S. 489—506.

kehrbar, aber nicht reversibel sind. Geht man ferner von irgendeiner reversiblen Substitution (20.) aus, so bestimmen die Gleichungen

$$y_1 = 0, y_x = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{x-1,\lambda}\, x_\lambda \qquad (x=2,3,\ldots)$$

eine lineare Transformation, die reversibel ist, ohne algebraisch umkehrbar zu sein.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß, wenn eine algebraisch umkehrbare Substitution A regulär ist, auch ihre Inverse A^{-1} regulär sein muß. Ebenso leicht erkennt man, daß eine konvergenzerzeugende Substitution weder algebraisch umkehrbar noch reversibel sein kann.

§ 8.

Über die Multiplikation unendlicher Reihen.

Gegeben seien zwei unendliche Reihen

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \cdots,$$

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \cdots$$

mit den Partialsummen

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Die nach der *Cauchy*schen Regel gebildete Produktreihe

$$(w) \qquad w_1 + w_2 + \cdots$$

wird bekanntlich erhalten, indem man

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

setzt. Ihre Partialsummen mögen mit W_n bezeichnet werden. Im Falle der Konvergenz sollen U, V, W die Summen der entsprechenden Reihen bedeuten. Sind alle drei Reihen konvergent, so ist jedenfalls, wie schon *Abel* gezeigt hat, $W = UV$. Herr *Mertens**) hat ferner bewiesen, daß die Reihe (w) konvergent ist, sobald nur die Reihen (u) und (v) konvergent sind, und mindestens eine von ihnen absolut konvergiert.

Dieser Satz folgt nun sehr einfach aus unserem Satz I, wobei sich noch folgender Zusatz ergibt, aus dem hervorgeht, daß das *Mertens*sche Resultat in einem gewissen Sinne durch kein schärferes ersetzt werden kann: *Geht man von irgendeiner Reihe (u) aus, die nicht absolut konvergent ist, so läßt sich stets eine konvergente Reihe (v) angeben, für welche die Produktreihe (w) divergent wird.*

---

*) „Über die Multiplikationsregel für zwei unendliche Reihen", dieses Journal, Bd. 79 (1875), S. 182–184.

Es ist nämlich

$$W_n = u_n V_1 + u_{n-1} V_2 + \cdots + u_1 V_n. \tag{31.}$$

Denkt man sich die Reihe (u) beliebig gegeben, so definieren diese Gleichungen eine lineare Transformation $A = (a_{\varkappa\lambda})$, welche die V_n in die W_n überführt. Wird nun verlangt, daß (w) konvergieren soll, sobald nur (v) konvergiert, so bedeutet das nur, daß A eine konvergenzerhaltende Operation sein soll. In den Bezeichnungen des § 1 wird hier nun

$$\sigma_n = U_n,\ \zeta_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|.$$

Die dritte Bedingung des Satzes I besagt hier nur, daß die Reihe (u) absolut konvergent sein muß. Ist das aber der Fall, so wird

$$\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n = U,\ a_\lambda = \lim_{\varkappa=\infty} a_{\varkappa\lambda} = \lim_{\varkappa=\infty} u_{\varkappa+1-\lambda} = 0.$$

Die Bedingungen 1. und 2. des Satzes I sind daher von selbst erfüllt. Nimmt man aber die Reihe (u) als nicht absolut konvergent an, so wird A keine konvergenzerhaltende Substitution, und dies bedeutet nur, daß sich die Reihe (v) so wählen läßt, daß die V_n einem endlichen Grenzwert zustreben, die W_n aber nicht.

Man kann auch leicht untersuchen, wann die lineare Transformation (31.) als reversibel zu bezeichnen ist. Beschränkt man sich, was offenbar gestattet ist, auf den Fall $u_1 \neq 0$ und setzt

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^{\nu-1},\ \frac{1}{f(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} u'_\nu x^{\nu-1},$$

so erhält die zu (31.) inverse Substitution die Form

$$V_n = u'_n W_1 + u'_{n-1} W_2 + \cdots + u'_1 W_n.$$

Damit diese Substitution wieder konvergenzerhaltend sei, ist notwendig und hinreichend, daß auch die Reihe $\Sigma u'_n$ absolut konvergiere. Ist dies nicht der Fall, so kann die Reihe (w) konvergieren, ohne daß (v) diese Eigenschaft hat. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen der Herren *Pringsheim*, *Voß* und *Cajori*, aus denen hervorgeht, daß es unendlich viele Paare nur bedingt konvergenter oder auch divergenter Reihen (u), (v) gibt, die auf eine konvergente Produktreihe (w) führen*).

*) Vgl. insbesondere *A. Pringsheim*, „Über die Anwendung der Cauchyschen Multiplicationsregel auf bedingt convergente oder divergente Reihen". Transactions of the Amer. Math. Soc. Bd. II (1901), S. 404—412.

Auch die Untersuchungen von *Cesàro* über die Bedeutung der von ihm eingeführten Mittelbildungen für die Multiplikation der Reihen lassen sich in den Rahmen unserer Theorie einordnen. Setzt man $U_n^{(-1)} = u_n$ und

$$U_n^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu^{(r-1)} = \binom{n+r-1}{r} C_n^{(r)}(u), \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

so heißt bekanntlich die Reihe (u) im *Cesàro*schen Sinne von der r-ten Ordnung summierbar, wenn

$$\lim_{n=\infty} C_n^{(r)}(u) = U^{(r)}$$

existiert und einen endlichen Wert hat. Die Reihe (u) möge ferner von der r-ten Ordnung oszillierend genannt werden, wenn die Zahlen $|C_n^{(r)}(u)|$ für alle Werte von n unterhalb einer endlichen Schranke liegen*). Führt man für die Reihen (v) und (w) die analogen Bezeichnungen ein, so wird für $s = 0, 1, \ldots, r$

$$W_n^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu^{(r-s-1)} V_{n+1-\nu}^{(s)}$$

und also

$$C_n^{(r)}(w) = \frac{1}{p_n^{(r)}} \sum_{\nu=1}^{n} p_{n+1-\nu}^{(s)} U_\nu^{(r-s-1)} C_{n+1-\nu}^{(s)}(v), \tag{32.}$$

wobei die Abkürzung

$$p_k^{(l)} = \binom{k+l-1}{l}$$

benutzt worden ist. Hält man nun wieder die Zahlen u_ν fest, so bestimmen die Gleichungen (32.) eine lineare Transformation, welche die $C_n^{(s)}(v)$ in die $C_n^{(r)}(w)$ überführt. Wendet man auf sie den Satz I an, so ergibt eine einfache Betrachtung folgendes Resultat:

XI. *Man gehe von einer gegebenen Reihe (u) aus und schreibe zwei nicht negative ganze Zahlen r und $s \leqq r$ vor. Verlangt man nun, daß für jede Reihe (v), die von der s-ten Ordnung summierbar ist, die Produktreihe (w) von der r-ten Ordnung summierbar sein soll, so lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen folgendermaßen: Die Reihe (u) muß von der r-ten Ordnung summierbar sein, und außerdem müssen die Ausdrücke*

$$\frac{1}{n^r} \sum_{\nu=1}^{n} (n+1-\nu)^s \left| U_\nu^{(r-s-1)} \right| \tag{33.}$$

*) Es wird hierbei nicht verlangt, daß r die kleinste Zahl sein soll, die dieser Bedingung genügt. Dasselbe gilt auch für den Fall der Summierbarkeit.

unterhalb einer endlichen Schranke liegen. Es ist dann stets $W^{(r)} = U^{(r)} V^{(s)}$. *Für* $s < r$ *sind beide Bedingungen von selbst erfüllt, wenn* (u) *schon von der* $(r-s-1)$*-ten Ordnung summierbar ist. Für* $s = r$ *folgt bereits allein aus der zweiten Bedingung, daß die Reihe* (u) *als absolut konvergent angenommen werden muß.*

Dieser Satz liefert das Hauptergebnis von *Cesàro**) in präziserer Fassung.

Es bereitet auch keine Mühe zu entscheiden, wann die lineare Transformation (32.) eine konvergenzerzeugende Operation ist, d. h. unter welchen Bedingungen für die Reihe (u) die Produktreihe (w) von der r-ten Ordnung summierbar wird, sobald nur (v) von der s-ten Ordnung oszillierend ist. Auf Grund des Satzes III gelangt man leicht zu dem Ergebnis, *daß dies dann und nur dann eintritt, wenn* (u) *von der* r*-ten Ordnung summierbar ist und der Ausdruck* (33.) *mit wachsendem* n *gegen* 0 *konvergiert***). Es wird dann stets $W^{(r)} = 0$. Für $s < r$ sind die beiden Bedingungen erfüllt, wenn (u) schon von der $(r-s-1)$-ten Ordnung summierbar und $U^{(r-s-1)} = 0$ ist. Der Fall $s = r$ ist hier ohne Interesse, weil dann bereits die zweite Bedingung erfordert, daß alle u_n verschwinden.

Geht man z. B. von irgendeiner konvergenten Reihe (u) mit der Summe $U = 0$ aus und wählt für (v) eine beliebige Reihe, die von der s-ten Ordnung oszillierend ist, so wird (w) stets von der $(s+1)$-ten Ordnung summierbar und $W^{(s+1)} = 0$ sein.

In ganz ähnlicher Weise wie die *Cauchy*sche Produktreihe (w) läßt sich auch die nach der *Dirichlet*schen Multiplikationsregel gebildete Reihe

$$(w') \qquad w_1' + w_2' + \cdots, \quad w_n' = \sum_{d|n} u_d \, v_{\frac{n}{d}}$$

behandeln. Auch hier gilt, wie zuerst *Stieltjes****) bewiesen hat, das Analogon zum *Mertens*schen Satz: Sind die Reihen (u) und (v) konvergent

---

*) Sur la multiplication des séries, Bull. des Sciences Math. (2) XIV (1890), S. 114—120. Vgl. auch *Bromwich*, An Introduction to the Theory of Infinite Series (London, 1908), § 125.

**) Man hat hierbei ebenso wie beim Beweis des Satzes XI nur zu beachten, daß, wenn (u) von der r-ten Ordnung summierbar ist, $\lim_{n=\infty} n^{-r} U_n^{(r-s-1)} = 0$ wird.

***) Note sur la multiplication de deux séries, Nouvelles Annales de Math. (3) VI (1887), S. 210—213. Vgl. auch *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteiung der Primzahlen, Bd. II, § 185.

und ist mindestens eine von ihnen absolut konvergent, so konvergiert auch die Reihe (w') und ihre Summe ist gleich $U\,V$. Nach unserer Methode ergibt sich dieses Resultat wieder mit dem Zusatz: Ist (u) eine gegebene nicht absolut konvergente Reihe, so kann stets eine konvergente Reihe (v) gewählt werden, für welche die Reihe (w') divergent wird.

§ 9.

Das Dedekindsche Konvergenzkriterium und seine Verallgemeinerung.

Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen

(34.) $$\gamma_1, \gamma_2, \cdots$$

möge als eine Faktorenfolge für konvergente Reihen bezeichnet werden, wenn für *jede* konvergente Reihe

(35.) $$u_1 + u_2 + \cdots$$

auch die Reihe

(36.) $$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots$$

konvergent ist. Ferner soll (34.) eine Faktorenfolge für oszillierende Reihen heißen, wenn die Reihe (36.) konvergiert, sobald nur die Partialsummen von (35.) beschränkt sind. Das bekannte *Dedekind*sche Konvergenzkriterium besagt nun, daß die γ_n die zuerst genannte Eigenschaft besitzen, wenn die Reihe

(37.) $$|\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_2 - \gamma_3| + \cdots$$

konvergiert, und daß auch die zweite Forderung erfüllt ist, wenn außerdem noch $\lim \gamma_n = 0$ ist. Herr *Hadamard**) hat umgekehrt bewiesen, daß diese Bedingungen auch als notwendige zu bezeichnen sind.

Dies ergibt sich fast unmittelbar aus unseren Sätzen I und III. Denn setzt man

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad V_n = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n u_n,$$

so wird

(38.) $$V_n = \sum_{\lambda=1}^{n-1} (\gamma_\lambda - \gamma_{\lambda+1}) U_\lambda + \gamma_n U_n,$$

und es handelt sich nur darum, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese lineare Transformation der U_ν in die V_ν konvergenzerhaltend bzw. konvergenzerzeugend ist. In den früheren Bezeichnungen wird hier

---

*) Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries, Acta Math. Bd. 27 (1913), S. 177–183.

$$a_\lambda = \gamma_\lambda - \gamma_{\lambda+1},\ \sigma_n = \gamma_1,\ \zeta_n = \sum_{\lambda=1}^{n-1} |\gamma_\lambda - \gamma_{\lambda+1}| + |\gamma_n|.$$

Die Bedingungen 1. und 2. des Satzes I sind von selbst erfüllt. Die dritte Bedingung ($\zeta_n <$ Const.) besagt insbesondere, daß die Reihe (37.) konvergieren muß, und dies genügt auch, weil alsdann

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \gamma_1 - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\gamma_\lambda - \gamma_{\nu+1})$$

existiert, demnach auch $|\gamma_n|$ beschränkt ist. Die Konvergenz der Reihe (37.) ist also die einzige notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformation (38.) konvergenzerhaltend sei. Soll sie außerdem noch konvergenzerzeugend sein, so kommt noch die Bedingung 4′. des § 1 hinzu, die sich hier offenbar auf $\lim \gamma_n = 0$ reduziert.

Auf eine Verallgemeinerung des *Dedekind*schen Konvergenzkriteriums hat Herr *Bromwich**) aufmerksam gemacht: Man setze

$$\Delta^0 \gamma_\nu = \gamma_\nu,\ \Delta^k \gamma_\nu = \Delta^{k-1} \gamma_\nu - \Delta^{k-1} \gamma_{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k}{\lambda} \gamma_{\nu+\lambda};$$

ist $\lim n^k \gamma_n = 0$ und ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^k |\Delta^{k+1} \gamma_\nu| \tag{39.}$$

konvergent, so wird die Reihe $\Sigma \gamma_\nu u_\nu$ konvergent, sobald nur die Reihe Σu_ν von der k-ten Ordnung oszillierend ist. Eine andere Verallgemeinerung spielt in den interessanten Untersuchungen des Herrn *H. Bohr* über die Summabilität der *Dirichlet*schen Reihen eine wichtige Rolle: Ist $\lim \gamma_n = 0$ und ist die Reihe (39.) konvergent, so geht jede von der k-ten Ordnung oszillierende Reihe Σu_ν in eine Reihe $\Sigma \gamma_\nu u_\nu$ über, die von der k-ten Ordnung summierbar ist**).

An diese Sätze läßt sich eine etwas allgemeinere Betrachtung anknüpfen: Sind k und l zwei gegebene nicht negative ganze Zahlen, so bezeichne man die Größen γ_n als eine Faktorenfolge vom Typus (s_k, s_l), wenn *jede* von der k-ten Ordnung summierbare Reihe Σu_ν auf eine Reihe $\Sigma \gamma_\nu u_\nu$ führt, die von der l-ten Ordnung summierbar ist. Ist dies ferner

---

*) On the limits of certain infinite series and integrals, Math. Ann. Bd. 65 1908), S. 350—369.

**) *H. Bohr*, Bidrag til de *Dirichlet*ske Raekkers Theorie, Inaug.-Diss., Kopenhagen 1910, S. 61.

schon der Fall, sobald nur Σu_ν von der k-ten Ordnung oszillierend ist, so nenne man die γ_n eine Faktorenfolge vom Typus (o_k, s_l) *). Um nun diese Faktorenfolgen durch notwendige und hinreichende Bedingungen zu charakterisieren, führe man für Σu_ν die im vorigen Paragraphen erklärten Mittelwerte $C_n^{(k)}(u)$ ein. Hat $C_n^{(l)}(v)$ die entsprechende Bedeutung für die Reihe $\Sigma \gamma_\nu u_\nu$, so wird, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$C_n^{(l)}(v) = \Sigma a_{n\nu} C_\nu^{(k)}(u), \tag{40.}$$

wo

$$\binom{n+l-1}{l} a_{n\nu} = \binom{\nu+k-1}{k} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{n-\nu+l-k-1}{l-\mu} \binom{k+1}{\mu} \Delta_{\gamma_\nu}^{k+1-\mu}$$

zu setzen ist. Hierbei soll $m = \text{Min}(k+1, l)$ sein und $\Delta_{\gamma_\nu}^{k+1-\mu}$ den Ausdruck bedeuten, der aus $\Delta_{\gamma_\nu}^{k+1-\mu}$ hervorgeht, wenn $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ durch 0 ersetzt werden. Indem ich nun auf Grund unserer Sätze I und III untersucht habe, unter welchen Bedingungen die lineare Transformation (40.) konvergenzerhaltend bzw. konvergenzerzeugend ist, bin ich zu folgendem einfachen Ergebnis gelangt:

XII. *Ist $k \geqq l$, so stellen die Zahlen γ_n dann und nur dann eine Faktorenfolge vom Typus (s_k, s_l) dar, wenn die Reihe (39.) konvergent und $\gamma_n = O(n^{l-k})$ ist* **). *Soll die Faktorenfolge zugleich auch vom Typus (o_k, s_l) sein, so kommt nur noch hinzu, daß $\gamma_n = o(n^{l-k})$ sein muß. Für $k < l$ gibt es keine Faktorenfolge vom Typus (s_k, s_l) oder (o_k, s_l), die nicht schon vom Typus (s_k, s_k) bzw. (o_k, s_k) ist.*

Auf den Beweis, der eine recht umständliche Rechnung erfordert, soll hier nicht eingegangen werden.

Wendet man den Satz XII auf die Zahlen $\gamma_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ an und beachtet, daß in diesem Fall die Reihe (39.) für jedes $k \geqq 0$ konvergiert, so ergibt sich: Ist die Reihe Σu_ν von der k-ten Ordnung

---

*) Hierbei ist zu beachten, daß für $k' \leqq k$ $l' \geqq l$ die Faktorenfolgen vom Typus (s_k, s_l) oder (o_k, s_l) unter denen vom Typus $(s_{k'}, s_{l'})$ bzw. $(o_{k'}, s_{l'})$ enthalten sind.

**) Nach dem Vorgange der Herren *P. Bachmann* und *E. Landau* wird hierbei durch eine Gleichung $\alpha_n = O(\beta_n)$ oder $\alpha_n = o(\beta_n)$ zum Ausdruck gebracht, daß $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| <$ Const. bzw. $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ sein soll.

summierbar ($k > 0$), so ist die Reihe

$$\frac{u_1}{1^\alpha} + \frac{u_2}{2^\alpha} + \cdots \tag{41.}$$

in allen Fällen von der Ordnung $k - [\alpha]$, aber nicht immer von der Ordnung $k - [\alpha] - 1$ summierbar; ist ferner Σu_ν von der k-ten Ordnung oszillierend, so ist die Reihe (41.) stets von der k-ten, aber auch für $\alpha = 1$ nicht immer von der $(k-1)$-ten Ordnung summierbar. Dieses Resultat bildet eine der Grundlagen der Lehre von der Summabilität der *Dirichlet*schen Reihen*).

§ 10.

Anwendungen auf Potenzreihen.

Ist die Reihe

$$s = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots \tag{42.}$$

konvergent und setzt man für $|x| < 1$

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

so ist bekanntlich

$$\lim_{x \to 1} f(x) = s.$$

Hierbei kann x auf dem Radius $0 \ldots 1$ oder auch längs irgendeiner im Innern des Einheitskreises verlaufenden Kurve, für die

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \text{Const.}$$

ist, der Stelle 1 zustreben. Dies ist der *Abel*sche Stetigkeitssatz in der *Stolz-Pringsheim*schen Fassung**).

Es ist leicht zu sehen, daß auch dieser Satz nur als ein Spezialfall unseres Satzes I aufgefaßt werden kann (vgl. Einleitung). Setzt man nämlich

$$s_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n,$$

so wird für $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} s_\lambda (1-x) x^\lambda.$$

Ist nun $x_1, x_2, \ldots$ irgendeine gegebene Folge von Punkten, die den Bedingungen

$$|x_\varkappa| < 1, \quad \lim_{\varkappa = \infty} x_\varkappa = 1 \tag{43.}$$

---

*) Vergl. *H. Bohr*, a. a. O. und *M. Riesz*, Sur les séries de *Dirichlet*, Comptes Rendus, Bd. 148 (1909), S. 1658—1660.

**) Vergl. *A. Pringsheim*, Über zwei *Abel*sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend, Sitzungsber. der Bayer. Akad., Bd. 27 (1897), S. 343 — 356.

genügen, so bestimmen die Gleichungen

$$f(x_x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-x_x)\, x_x^{\lambda}.\, s_\lambda$$

eine lineare Transformation A, welche die Zahlenfolge s_λ in die Folge $f(x_x)$ überführt. In den so oft benutzten Bezeichnungen wird hierbei

$$a_\lambda = \lim_{x=\infty} (1-x_x)\, x_x^{\lambda} = 0,\ \sigma = \lim_{x=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-x_x)\, x_x^{\lambda} = 1$$

und

$$\zeta_x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} |1-x_x|\, |x_x|^{\lambda} = \frac{|1-x_x|}{1-|x_x|}. \tag{44.}$$

Liegen nun diese Zahlen unterhalb einer endlichen Schranke (was für reelle positive x_x von selbst der Fall ist), so wird A eine konvergenzerhaltende (reguläre) Operation und daher ist, wie zu beweisen war,

$$\lim_{x=\infty} f(x_x) = \lim_{\lambda=\infty} s_\lambda = s.$$

Zugleich ergibt sich aber auch, daß *zu jeder Folge von gegen* 1 *konvergierenden Zahlen* x_x, *für welche die Ausdrücke* (44.) *nicht unterhalb einer endlichen Schranke liegen, eine konvergente Reihe* (42.) *angegeben werden kann, bei der* $\lim f(x_n)$ *nicht existiert.*

Nimmt man die x_x als reell und positiv an, so erscheint A als eine reguläre lineare Substitution mit positiven Koeffizienten. Aus dem Satze VII ergibt sich daher, daß für eine Potenzreihe $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die an der Stelle $x=1$ eigentlich divergent ist, d. h. der Bedingung $\lim s_\lambda = \infty$ genügt, auch $\lim f(x_x) = \infty$ wird. Dies liefert eine bekannte wichtige Ergänzung zum *Abel*schen Stetigkeitssatz*).

Auch die von *Frobenius* und Herrn *O. Hölder***) angegebene Verallgemeinerung des *Abel*schen Satzes, die sich auf den Fall einer von der k-ten Ordnung summierbaren Reihe (42.) bezieht, läßt sich in genau derselben Weise behandeln.

Eine andere Verallgemeinerung, die von *Cesàro* herrührt, lautet: Sind zwei für $|x|<1$ konvergente Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,\ g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

mit reellen nicht negativen Koeffizienten gegeben, die für $x=1$ divergent

*) Vergl. *A. Pringsheim*, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Sitzungsber. der Bayer. Akad. Bd. 30 (1900), S. 37—100.

**) Vergl. *E. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, zweites Kapitel.

sind, so ist (für reelle x)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

unter der Voraussetzung, daß der rechtsstehende Limes existiert. Um diesen Satz nach unserer Methode zu erhalten, setze man $a_n = b_n u_n$. Für reelle positive Zahlen $x_\varkappa$, die den Bedingungen (43.) genügen, erscheint dann

$$\frac{f(x_\varkappa)}{g(x_\varkappa)}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{b_\lambda x_\varkappa^\lambda}{g(x_\varkappa)}\cdot u_\lambda \qquad (\varkappa=1,2,\ldots)$$

als eine lineare Transformation der u_λ, die offenbar wieder den Bedingungen des Satzes II genügt, also regulär ist. Sobald also $\lim u_\lambda = u$ existiert, konvergieren auch die Zahlen $\frac{f(x_\varkappa)}{g(x_\varkappa)}$ gegen u.

Im Allgemeinen wird die hier entwickelte Betrachtungsweise nur dann anwendbar sein, wenn es sich um Behauptungen handelt, die für *beliebige* konvergente bzw. beschränkte Zahlenfolgen (oder unendliche Reihen) gelten sollen. Unsere Methode wird, soweit sie hier ausgebildet ist, dagegen versagen, falls die zu behandelnden Zahlenfolgen noch weiteren Bedingungen unterworfen werden. Von dieser Art sind insbesondere die in neuerer Zeit entstandenen wichtigen Ergänzungen zum *Abel*schen Satz, die als die Umkehrungssätze bekannt sind*). Nur beim *Tauber*schen Satz**) gelingt es, den Beweis mit Hilfe eines schon von Herrn *Tauber* benutzten Kunstgriffs auf unsere Resultate über lineare Transformationen zurückzuführen. Hierbei ergibt sich auch eine nicht uninteressante Bemerkung zum viel tiefer liegenden ersten Satz des Herrn *Littlewood****).

Der *Tauber*sche Satz lautet: *Ist* $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *und existiert* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *bei Annäherung längs des Radius* $0\ldots 1$, *so ist die Reihe* Σc_n *konvergent.* Um nun den Beweis zu erbringen und zugleich auch zu untersuchen, inwiefern die Beschränkung auf reelle x wesentlich ist, setze man $c_n = \frac{u_n}{n}$ und betrachte irgendeine Zahlenfolge $x_n = r_n e^{i\varphi_n}$, die den Bedingungen (43.) ge-

*) Vergl. *E. Landau*, a. a. O., §§ 7—11.

**) *A. Tauber*, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. 8 (1897), S. 273—277.

***) The Converse of *Abel*'s Theorem on Power Series. London Math. Soc. Proc. (2), Bd. 9 (1911), S. 434—448.

nügt. Dann definieren die Gleichungen

$$(45.) \qquad s_x - f(x_x) = \sum_{\mu=1}^{x} \frac{1-x_x^\mu}{\mu} \cdot u_\mu - \sum_{\nu=x+1}^{\infty} \frac{x_x^\nu}{\nu} \cdot u_\nu$$

eine lineare Transformation $A = (a_{x\lambda})$ der u_λ. Der *Tauber*sche Satz beruht nun einfach darauf, daß A für $x_x = 1 - \frac{1}{x}$ eine konvergenzerhaltende Operation wird. Es genügt offenbar sogar, eine (reelle) Zahlenfolge x_x anzugeben, für die A eine Operation wird, die jede Nullfolge u_λ in eine konvergente Folge überführt. Unter welchen Bedingungen das (auch für komplexe x_x) eintritt, wissen wir auf Grund des Satzes IV des § 3. Da hier in den früheren Bezeichnungen

$$(46.) \qquad a_\lambda = \lim_{x=\infty} \frac{1-x_x^\lambda}{\lambda} = 0$$

ist, so hat man nur zu untersuchen, ob die Zahlen

$$(47.) \qquad \zeta_x = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{x\lambda}| = \sum_{\mu=1}^{x} \frac{|1-x_x^\mu|}{\mu} + R_x,\ R_x = \sum_{\nu=x+1}^{\infty} \frac{r_x^\nu}{\nu}$$

unterhalb einer endlichen Schranke liegen. Die Herren *Landau*, *Hardy* und *Littlewood* haben auch komplexe x_x angegeben, für die das der Fall ist, und auf diese Weise die *Tauber*sche Voraussetzung, daß $\lim_{x\to 1} f(x)$ für reelle x existieren soll, durch anders geartete Voraussetzungen ersetzt*).

Für reelle positive $x_x = 1 - \frac{\xi_x}{x}$ wird insbesondere

$$(48.) \qquad \zeta_x = \sum_{\mu=1}^{x} \frac{1}{\mu} + \log(1-x_x) + 2R_x = \log \xi_x + C + 2R_x + o(1),$$

wo C die *Euler*sche Konstante bedeutet. Soll $\zeta_x <$ Const. sein, so müssen wegen (47.) auch die Zahlen R_x unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Aus (48.) folgt dann noch, daß die ξ_x in einem endlichen Intervall

$$0 < \alpha \leqq \xi_x \leqq \beta$$

liegen müssen. Ist dies aber der Fall, so wird von selbst

$$R_x < \frac{1}{x} \sum_{\nu=x+1}^{\infty} x_x^\nu < \frac{1}{x(1-x_x)} = \frac{1}{\xi_x} < \text{Const.}$$

Diese Betrachtung liefert also das Resultat: Für reelle positive Zahlen

$$x_x = 1 - \frac{\xi_x}{x} < 1,\ \lim_{x=\infty} x_x = 1$$

kann dann und dann geschlossen werden, daß für jede Potenzreihe $f(x)$, deren Koeffizienten der Bedingung $\lim n\, c_n = 0$ genügen,

*) Vergl. *E. Landau*, a. a. O., § 8.

$$\lim_{x=\infty} [s_x - f(x_x)] = 0$$

sein muß, wenn die ξ_x zwischen zwei endlichen positiven Zahlen α und β liegen.

Der *Littlewood*sche Satz besagt, daß das *Tauber*sche Resultat richtig bleibt, wenn die Voraussetzung $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ durch $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ersetzt wird*). Dieser Satz würde sich offenbar unmittelbar ergeben, wenn es gelänge, eine den Bedingungen (43.) genügende (reelle) Zahlenfolge x_x anzugeben, für welche die lineare Transformation (45.) eine konvergenzerzeugende Operation wird. Ich will nun zeigen, daß es eine Zahlenfolge dieser Art nicht gibt, auch dann nicht, wenn man komplexe x_x zuläßt. Aus der Bedingung 4'. des § 1 folgt nämlich mit Rücksicht auf (46.), daß die Ausdrücke (47.) gegen 0 konvergieren müßten. Wegen $R_x < \zeta_x$ müßte also auch $\lim R_x = 0$ sein. Setzt man ferner $r_x = 1 - \frac{\varrho_x}{x}$, so ergibt sich aus

$$\zeta_x \geqq \sum_{\mu=1}^{x} \frac{1 - r_x^\mu}{\mu} + R_x = \sum_{\mu=1}^{x} \frac{1}{\mu} + \log(1 - r_x) + R_x = \log \varrho_x + C + 2R_x + o(1),$$

daß die ϱ_x als nach oben beschränkt anzunehmen wären. Ist nun $\varrho_x \leqq \varrho$, also $r_x \geqq 1 - \frac{\varrho}{x}$, so wird für $x > \varrho$

$$R_x > \sum_{\nu=x+1}^{2x} \frac{r_x^\nu}{\nu} > \left(1 - \frac{\varrho}{x}\right)^{2x} \sum_{\nu=x+1}^{2x} \frac{1}{\nu}.$$

Der rechts stehende Ausdruck konvergiert nun mit wachsendem x gegen $e^{-2\varrho} \log 2$, und daher kann nicht $\lim R_x = 0$ sein.

Wir erkennen auf diese Weise, daß zu jeder Zahlenfolge x_x, die den Bedingungen (43.) genügt, eine Potenzreihe $f(x)$ angegeben werden kann, bei der $n|c_n| <$ Const. ist, aber $\lim_{x=\infty} [s_x - f(x_x)]$ nicht existiert**).

---

*) Einen noch weiter gehenden Satz haben später (im Jahre 1914) die Herren *Hardy* und *Littlewood* bewiesen. Vergl. *E. Landau*, a. a. O., § 9.

**) Kurz vor Abschluß der Korrekturen ist mir eine im Tôhoku Math. Journal, Bd. 12 (1917), S. 291—326, erschienene Arbeit des Herrn *T. Kojima* bekannt geworden, in der für *zeilenfinite* Substitutionen der Form $y_x = \sum_{\lambda=1}^{x} a_{x\lambda} x_\lambda$ die Theorie und auch die von mir in den §§ 8 und 9 behandelten Anwendungen der *konvergenzerhaltenden* Operationen bereits vollständig entwickelt werden. Ein Analogon zu den konvergenzerzeugenden Transformationen bei Integraloperationen $v(x) = \int_a^x a(x,y) u(y) dx$ behandelt Herr *Kojima* in einer späteren Arbeit (ebenda, Bd. 14 (1918), S. 64—79).

Berlin, im Juni 1918.

Über die Zerlegung der Primteiler in relativ cyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die *Kummer*schen Körper.

Von Herrn *Kurt Hensel*.

Es sei K ein beliebiger Körper algebraischer Zahlen, A eine Zahl desselben und

$$(1.) \qquad x^m = A$$

irgend eine irreduzible reine Gleichung in K. Dann wird durch eine ihrer Wurzeln x ein Körper $K(x)$ über K definiert, und jede Primzahl $\mathfrak{p}$ in K zerfällt innerhalb $K(x)$ eindeutig in ein Produkt von Primteilern $\mathfrak{P}$, welche gleich oder verschieden sein können. In dieser Arbeit soll die Art dieser Zerlegung genauer untersucht und die Ergebnisse zur vollständigen Lösung dieser Frage für die *Kummer*schen Zahlkörper verwendet werden.

Soll die Zerlegung eines Primteilers $\mathfrak{p}$ von K vom Grade f und von der Ordnung e im Körper $K(x)$ gefunden werden, so genügt es, die Grundgleichung (1.) für den Körper $K(\mathfrak{p})$ aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen π-adischen algebraischen Zahlen von K zu betrachten. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit*) habe ich nun gezeigt, daß jede Zahl A von $K(\mathfrak{p})$ für den Bereich von $\mathfrak{p}$ eindeutig folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$(2.) \quad A = \pi^a \, \bar{w}^{\bar{b}} \, \eta_1^{c_1} \, \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\mu^{c_\mu} \quad (\mathfrak{p}), \quad \begin{pmatrix} \bar{b} < (p^f - 1)\, p^\nu \\ c_i = c_i^{(0)} + p\, c_i^{(1)} + \cdots \end{pmatrix} \cdots .$$

Hier ist π eine Primzahl von $K(\mathfrak{p})$, d. h. irgend eine durch $\mathfrak{p}$ ein und nur

---

*) *K. Hensel*, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, Journal f. d. r. u. angew. Mathematik Bd. 146, S. 189—215.

einmal teilbare Zahl von K, p die zu $\mathfrak{p}$ gehörige reelle Primzahl, $\bar{w}$ eine primitive $(p^f-1)\,p^\nu$-te Einheitswurzel, deren Potenzen $\bar{w}^{\bar{b}}$ die in K enthaltenen Einheitswurzeln sämtlich darstellen; und $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\mu)$ bedeutet ein Fundamentalsystem von $\mu = ef$ Elementen für die multiplikative Darstellung der Zahlen von $K(\mathfrak{p})$, welches stets gefunden und in geschlossener Form dargestellt werden kann.

Aus der von mir gegebenen Theorie der algebraischen Zahlen*) folgt nun, daß die arithmetische Frage nach der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(x)$ vollständig auf das rein algebraische Problem zurückgeführt werden kann, wie die linke Seite

$$F(x) = x^m - A$$

der Grundgleichung (1.) im Körper $K(\mathfrak{p})$ in irreduzible Faktoren zerfällt. Hier kann nun das primitive Element x durch irgend ein anderes primitives Element x' desselben Körpers, also z. B. durch

$$(3.) \qquad x' = \tau x, \text{ oder } x' = a + bx, \text{ oder } x' = x^r$$

ersetzt werden, wo a, b, τ beliebige π-adische Zahlen bedeuten, von denen die beiden letzten nur nicht Null sein dürfen, während r irgend ein zu m teilerfremder ganzzahliger Exponent sein muß. In der Tat lehren ja die drei Auflösungsgleichungen

$$(3^a.) \qquad x = \frac{x'}{\tau}, \; x = \frac{x'-a}{b}, \; x = A^{m'} x'^{r'},$$

in deren letzter m' und r' der Bedingung $mm' + rr' = 1$ gemäß gewählte ganze Zahlen sind, daß wirklich $K(x) = K(x')$ ist.

Durch Anwendung der ersten von diesen Substitutionen $x' = \tau x$ überzeugt man sich sofort, daß in der Grundgleichung (1.) A durch $A\tau^m$ ersetzt werden kann, wo τ^m irgend eine m^{te} Potenz einer π-adischen Zahl bedeutet. Also können bei der multiplikativen Darstellung (2.) von A in den Exponenten beliebige Multipla von m fortgelassen oder zugefügt werden; also können diese Exponenten von vorn herein so beschränkt vorausgesetzt werden, daß sie nicht negative den Bedingungen

$$(4.) \qquad a < m, \; \bar{b} < (m, (p^f-1)\,p^\nu), \; c_i < (m, p^\infty) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

genügende ganze Zahlen sind, wo (m, p^∞) einfach die größte in m enthaltene Potenz von $\mathfrak{p}$ bedeutet.

---

*) *K. Hensel*, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Mathematische Zeitschrift Bd. 2, S. 433—452.

Ferner kann und soll die Aufgabe ohne Beeinträchtigung ihrer Allgemeinheit dadurch ganz wesentlich vereinfacht werden, daß der Grad m der Gleichung als eine Primzahlpotenz $l^\varkappa$ oder noch einfacher als eine Primzahl l vorausgesetzt wird. Ist nämlich $m = rs$ irgendeine Zerlegung von m in zwei ganzzahlige Faktoren, so kann ja die Gleichung (1.) durch die beiden gleichartigen

$$x^r = y,\ y^s = A$$

ersetzt werden, von denen die erste nur demjenigen höheren Körper $K(y)$ angehört, dessen primitives Element y durch die zweite Gleichung bestimmt ist.

Es sei also zunächst $m = l^\varkappa$ eine beliebige Primzahlpotenz und

$$x^{l^\varkappa} = A \tag{5.}$$

die vorgelegte Gleichung. Ist nun l^n die höchste in $(p^\nu - 1)\, p^\nu = l^n \mathfrak{k}$ enthaltene Potenz von l, sind also die primitiven $l^{n\,\text{ten}}$ Einheitswurzeln aber nicht die $l^{n+1\,\text{ten}}$ in K enthalten, dann kann jede Einheitswurzel $\overline{w^b}$ eindeutig in der Form $w^b\, w'^{b'}$ $(b < l^n, b' < \mathfrak{k})$ dargestellt werden, wenn w und w' je eine primitive $l^{n\,\text{te}}$ und $\mathfrak{k}^{\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet. Hiernach ergibt sich (für A die π-adische Darstellung $A = \pi^a\, w^b\, w'^{b'}\, \eta_1^{c_1} \dots \eta_\mu^{c_\mu}$, und da $(l^\varkappa, \mathfrak{k}) = 1$ ist, so kann $b' = 0$ angenommen, d. h. die Grundgleichung von vornherein in der Form:

$$x^{l^\varkappa} = A = \pi^a\, w^b\, \eta_1^{c_1} \dots \eta_\mu^{c_\mu}\ (\mathfrak{p}) \begin{pmatrix} a < l^\varkappa \\ b < (l^\varkappa, l^n) \\ c < (l^\varkappa, p^\infty) \end{pmatrix} \tag{5^a.}$$

vorausgesetzt werden.

Ist endlich noch $l \gtrless p$, so können auch alle μ Exponenten $c_i = 0$ vorausgesetzt werden, da ja dann $(l^\varkappa, p^\infty) = 1$ ist. Für alle Primzahlen l außer der einzigen p kann also die allgemeinste reine Gleichung stets in der einfachen Form:

$$x^{l^\varkappa} = A = \pi^a\, w^b\ (\mathfrak{p}) \begin{pmatrix} a < l^\varkappa \\ b < (l^\varkappa, l^n) \end{pmatrix} \tag{5^b.}$$

vorausgesetzt werden.

Nur für eine ganz beschränkte Anzahl von Primzahlen, nämlich für alle verschiedenen Primteiler $l_1, l_2, \dots l_g$ von $p^\nu - 1$ und außerdem noch mitunter für $l = p$, enthält K überhaupt l^{te} Einheitswurzeln. Für alle übrigen Primzahlen l ist $l^n = 1$; für sie kann also auch $b = 0$ angenommen und

die Grundgleichung für die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(x)$ stets in der folgenden Form:

$$(5^{c}.) \qquad x^{l^x} = A = \pi^a \quad (\mathfrak{p}) \quad (a < l^x)$$

vorausgesetzt werden.

In der vorliegenden Arbeit soll diese Untersuchung nur in dem ganz speziellen Falle des *Kummer*schen Zahlkörpers genau durchgeführt werden, während ich mir die Betrachtung des allgemeinen Falles mit diesen neuen wirksamen Hilfsmitteln für eine demnächst erscheinende Arbeit vorbehalte.

Es sei l eine rationale ungerade Primzahl, und $K = K(\zeta)$ der durch $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ bestimmte Kreiskörper. Ist dann A eine beliebige Zahl von K, welche nicht eine l^{te} Potenz in diesem Körper ist, so ist die Gleichung

$$(6.) \qquad x^l = A$$

innerhalb K irreduzibel, und eine ihrer Wurzeln x definiert den *Kummer*schen Körper $K(x)$ vom Relativgrade l über K. Ist nun $\mathfrak{p}$ irgend ein Primteiler innerhalb K, welcher zu der reellen Primzahl p gehören möge, so soll untersucht werden, wie $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(x)$ weiter zerfällt. Es ergibt sich das folgende Resultat:

Der Primteiler $\mathfrak{p}$ zerfällt innerhalb $K(x)$ stets auf die folgende Weise in Primfaktoren.

$$(7.) \qquad \mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_{g_0})^{e_0}$$

wo alle Primteiler $\mathfrak{P}_i$ von gleichem Relativgrade f_0 sind und $e_0 f_0 g_0 = l$ ist. Eine einzige dieser drei Zahlen ist also gleich l, die beiden anderen gleich Eins.

Bei der Behandlung sind die beiden Fälle $p \gtrless l$ und $p = l$ zu unterscheiden: Es sei zuerst $p \gtrless l$, und es gehöre p modulo l zum Exponenten f. Ist dann $\mathfrak{p}$ einer der Primfaktoren von p innerhalb K, so ist seine Ordnung gleich Eins und sein Grad gleich f. Für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ ist also p selbst ein Primzahl. Die Zahl A besitzt somit innerhalb $K(\mathfrak{p})$ eine multiplikative Darstellung:

$$(8.) \qquad A = p^a \bar{w}^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_f^{c_f} \quad (\mathfrak{p})$$

wo $\bar{w}$ eine primitive $(p^f - 1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel innerhalb $K(\mathfrak{p})$ bedeutet und die c_i ganze p-adische Zahlen sind.

Ist nun l^n die höchste in $p^f - 1$ enthaltene Potenz vom l, so enthält $K(\mathfrak{p})$ die $l^{n\,\text{ten}}$ aber nicht mehr die $(l^{n+1})^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln. Bei Be-

rücksichtigung von (5^b.) ergibt sich also, daß in diesem Falle die vorgelegte Grundgleichung durch eine einfachere von der Form:

(9.) $$x^l = p^a \omega^b \quad (\mathfrak{p}) \quad (a, b < l)$$

ersetzt werden kann, in welcher ω eine primitive $l^{n\text{te}}$ Einheitswurzel aus $K(\mathfrak{p})$ bedeutet. In diesem Falle ist der soeben ausgesprochene Satz nun fast unmittelbar zu beweisen:

Sind nämlich erstens a und b beide Null, ist also die ursprünglich gegebene Zahl A l^{ter} Potenzwert zu $\mathfrak{p}$, so wird die reduzierte Gleichung (9.):

(9^a.) $$x^l - 1 = 0 \quad (\mathfrak{p}),$$

und da ihre linke Seite innerhalb $K(\mathfrak{p})$ in die l rationalen Linearfaktoren $(x-1)(x-\zeta)\dots(x-\zeta^{l-1})$ zerfällt, so wird hier:

(10.) $$\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_l \text{ also } g_0 = l,\ e_0 = f_0 = 1.$$

Ist dagegen zweitens $a > 0$, b beliebig, so kann die Grundgleichung von vornherein in der Form

(11.) $$x^l = p\omega^b \ (\mathfrak{p})$$

gegeben angenommen werden; sind nämlich a' und l' so gewählt, daß $aa' + ll' = 1$ ist, so genügt das primitive Element $x' = x^{a'} p^{l'}$ der Gleichung $x'^l = p\omega^{ba'}$ von der verlangten Form. Also ist diese *Eisenstein*sche Gleichung innerhalb $K(\mathfrak{p})$ irreduzibel, und da aus ihr folgt, daß das primitive Element x von $K(x)$ eine Norm $n(x) = p\omega^b$ der kleinsten möglichen Ordnungszahl 1 hat, so ist $x \sim p^{\frac{1}{l}}$ selbst Primzahl innerhalb $K(x)$; es ist daher in diesem Falle

(12.) $$\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1^l, \text{ also } e_0 = l,\ f_0 = g_0 = 1.$$

Ist endlich $a = 0$, also $b > 0$, so folgt wie in (11.), daß wieder von vornherein $b = 1$ vorausgesetzt, die Gleichung (9.) also in der Form

(13.) $$x^l = \omega \ (\mathfrak{p})$$

angenommen werden kann. Hier ist also x eine primitive $(l^{n+1})^{\text{te}}$ Einheitswurzel, welche nicht in $K(\mathfrak{p})$ enthalten ist; da ferner aus der Gleichung $p^l = 1 + l^n \varrho$ folgt, daß p^l modulo l^{n+1} zum Exponenten l gehört, so ist x ein primitives Element von $K(x)$, dessen Konjugierte $x, x^{p^l}, x^{p^{2l}}, \dots x^{p^{(l-1)l}}$ sämtlich modulo $\mathfrak{P}_1$ inkongruent sind, wenn $\mathfrak{P}_1$ einen Primteiler von $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(x)$ bedeutet. Hieraus folgt, daß die Grundgleichung (13.) innerhalb $K(\mathfrak{p})$ unzerlegbar ist, und daß innerhalb $K(x)$

(14.) $$\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1 \text{ und } f_0 = l,\ e_0 = g_0 = 1$$

ist, und damit ist der Satz für alle von l verschiedenen Primzahlen bewiesen.

Es sei jetzt zweitens $p = l$. Hier ist innerhalb $K(\zeta)$

(15.) $$l \sim \mathfrak{l}^{l-1}$$

die Zerlegung von l in seine Primfaktoren, und $\lambda = 1 - \zeta$ ist für den Bereich $K(\mathfrak{l})$ des Primteilers $\mathfrak{l}$ eine Primzahl. Hier ist also $e = l - 1$, $f = 1$.

Die allgemeinen Betrachtungen im § 3 der a. S. 112 zitierten Abhandlung lehren nun, daß im Körper $K(\zeta)$ für den Bereich von l die folgenden l Einseinheiten der ersten, zweiten,... l^{ten} Ordnung

$$\eta_1 = 1 - \lambda,\ \eta_2 = 1 - \lambda^2, \ldots, \eta_{l-1} = 1 - \lambda^{l-1},\ \eta_l = 1 - \lambda^l$$

eine Basis für die multiplikative Darstellung aller Einseinheiten bilden. Das letzte Element $1 - \lambda^l$ ist hier deshalb hinzuzufügen, weil $(1-\lambda)^l = \omega^l = 1$ ist, also keine Einseinheit l^{ter} Ordnung ergibt.

Hiernach ergibt sich also innerhalb $K(\mathfrak{l})$ die folgende multiplikative Darstellung von A

(16.) $$A = \lambda^a w^b \eta_1^{c_1} \ldots \eta_l^{c_l} = \lambda^a w^b (1-\lambda)^{c_1} (1-\lambda^2)^{c_2} \ldots (1-\lambda^l)^{c_l} \quad (\mathfrak{l});$$

hier ist w eine primitive $(l-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, und die Exponenten c bedeuten ganze rationale l-adische Zahlen. Da aber hier $(l, l-1) = 1$ ist, so kann bei dieser Darstellung von vornherein $b = 0$ und alle Exponenten a, c_i modulo l reduziert, d. h. als ganze Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots l-1$ vorausgesetzt, also A in der reduzierten Form:

(16ª.) $$A = \lambda^a (1-\lambda)^{c_1} (1-\lambda^2)^{c_2} \ldots (1-\lambda^{l-1})^{c_{l-1}} (1-\lambda^l)^{c_l} \ (a, c_i < l)$$

angenommen werden.

Auch hier unterscheiden wir die folgenden drei möglichen Fälle:

Sind erstens alle reduzierten Exponenten a, c_i Null, ist also die ursprünglich gegebene Zahl A l^{ter} Potenzrest zu $\mathfrak{l}$, so zerfällt wieder die linke Seite der reduzierten Grundgleichung

(17.) $$x^l - 1 = (x-1)(x-\zeta)\ldots(x-\zeta^{l-1})$$

innerhalb $K(\mathfrak{l})$ in l Linearfaktoren, d. h. er wird auch hier:

(18.) $$\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \ldots \mathfrak{L}_l \text{ also } g_0 = l,\ e_0 = f_0 = 1.$$

Sind zweitens nicht alle modulo l reduzierten Exponenten a, c Null, und ist $a > 0$, so kann wieder von vornherein $a = 1$ angenommen werden, und man zeigt genau wie in (11.), daß

(18ª.) $$\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_1^l \text{ also } e_0 = l,\ f_0 = g_0 = 1$$

ist.

Es sei endlich drittens $a = 0$, aber von den Fxponenten c_i sei wenigstens einer positiv. Es sei c_m der erste positive in der Reihe $c_0, c_1, \ldots$.

Dann kann dieser wieder von vornherein gleich 1 angenommen werden. Dann ist in der reduzierten Grundgleichung:

$$f(x) = x^l - A = 0$$

$$A = (1-\lambda^m)(1-\lambda^{m+1})^{c_{m+1}} \cdots \equiv 1 - \lambda^m \pmod{\mathfrak{l}^{m+1}} \tag{19.}$$

Ist nun zuerst $m < l$, und werden, was ja dann immer möglich ist, m' und l' so gewählt, daß $mm' + ll' = 1$ ist, so ist

$$A = \lambda^{l'}(1-x)^{m'} \tag{20.}$$

ein primitives Element von $K(x)$, dessen Norm:

$$n(A) = \lambda^{l'l}\, n(1-x)^{m'} = \lambda^{l'l} f(1)^{m'} = \lambda^{l'l}(\lambda^{mm'} + \cdots) = \lambda + \cdots \tag{21.}$$

die kleinstmögliche Ordnungszahl 1 besitzt. Wie im zweiten Falle ist also auch hier

$$\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_1^l \text{ also } e_0 = l,\ f_0 = g_0 = 1. \tag{22.}$$

Zweitens sei $m = l$. Dann nimmt die reduzierte Gleichung die ganz einfache Gestalt an:

$$x^l = 1 - \lambda^l. \tag{23.}$$

Setzt man hier $\frac{1-x}{\lambda} = \xi$, so genügt das neue primitive Element ξ offenbar der folgenden Gleichung:

$$f(\xi) = \xi^l - \frac{l_1}{\lambda}\xi^{l-1} + \frac{l_2}{\lambda^2}\xi^{l-2} - \cdots + \frac{l}{\lambda^{l-1}}\xi - 1 = 0. \tag{23a.}$$

Betrachtet man diese Gleichung als Kongruenz modulo λ und beachtet, daß ja $l \sim \lambda^{l-1}$ ist, und daß genauer $-l = \lambda^{l-1}(1 + \cdots)$ wird, so ergibt sich sofort die Kongruenz:

$$f(\xi) \equiv \xi^l - \xi - 1 \pmod{\mathfrak{l}} \tag{23b.}$$

Es sei nun $\mathfrak{L}_1$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}$ innerhalb $K(x)$ und ξ_0 eine Wurzel von $f(x) = 0$ $(\mathfrak{P}_1)$, so folgt aus (23b.)

$$\xi_0^l \equiv \xi_0 + 1 \pmod{\mathfrak{L}_1},$$

und hieraus ergibt sich sofort, für $i = 1, 2, \ldots l-1$

$$\xi_0^{l^i} \equiv \xi_0 + i \pmod{\mathfrak{L}_1}.$$

Also sind die l zu ξ_0 konjugierten Elemente $\xi_0, \xi_0^l, \ldots \xi_0^{l^{l-1}}$ modulo $\mathfrak{L}_1$ inkongruente Einheiten, nämlich bzw. kongruent $\xi_0, \xi_0 + 1, \ldots \xi_0 + l - 1$. Der Relativgrad f_0 von $\mathfrak{L}_1$ ist somit gleich l, und es ist also

$$\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_1 \text{ also } f_0 = l,\ e_0 = g_0 = 1. \tag{24.}$$

Man kann diese sechs Resultate in einen einzigen Satz von großer Einfachheit zusammenfassen, wenn man das erweiterte *Legendre*sche Sym-

bol einführt, welches ich in einer früheren Arbeit definiert habe*). Ist, wie vorher:

$$x^l = A = \pi^a w^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_\mu^{c_\mu} \quad (\mathfrak{p})$$

die vorgelegte reine Gleichung im Bereiche $K(\mathfrak{p})$ des zu untersuchenden Primteilers $\mathfrak{p}$, wo w jetzt eine primitive $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist und $\eta_1, \dots \eta_\mu$ eine Basis für alle Einseinheiten bedeutet; dann habe ich das *Legendre*sche Symbol durch die Gleichung definiert:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (\zeta^a, \zeta_0^b, \zeta_1^{c_1} \dots \zeta_1^{c_\mu}).$$

Hier bedeutet ζ eine l^{te}, ζ_0 eine $(l, p^f-1)^{\text{te}}$, ζ_1 eine $(l, \mathfrak{p}^\infty)^{\text{te}}$ primitive Einheitswurzel.

Wendet man diese allgemeine Definition auf unseren Fall des *Kummer*schen Körpers an, und läßt in den beiden unterschiedenen Fällen $p \gtrless l$ und $p = l$ jedesmal die Elemente $\zeta_1^{c_i}$ bzw. ζ_0^b fort, welche gleich 1 werden, so erhält man für sie die beiden Symbole:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (\zeta^a; \zeta_0^b), \quad \left\{\frac{A}{\mathfrak{l}}\right\} = (\zeta^a, \zeta^{c_1}, \dots \zeta^{c_l-1}; \zeta^{c_l})$$

wo im zweiten Falle noch $\zeta_1 = \zeta$ gesezt werden konnte. In diesem letzten Falle fasse ich die l ersten Elemente $\zeta^a, \zeta^{c_1}, \dots \zeta^{c_l-1}$ zu einer ersten Gruppe zusammen, so daß jetzt beide Symbole aus je zwei Elementgruppen bestehen, deren letzte nur ein Element ζ_0^b bzw. ζ^{c_l} enthält, während die erste ein bzw. l Elemente umfaßt.

Aus diesem Symbole leite ich nun ein neues, das s. g. *reduzierte Legendresche Symbol* $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ her, welches gleich einer einzigen Einheitswurzel ist, nämlich der ersten beim Fortgang von links nach rechts, welche nicht gleich Eins ist, und diese werde gleich ζ^a oder ζ^β gesetzt, jenachdem sie der ersten oder zweiten Gruppe angehört. Ist kein einziges Element von 1 verschieden, ist also A l^{ter} Potenzwert, so werde $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$ gesetzt. Dann hat also in beiden Fällen $p \gtrless l$ und $p = l$, welche jetzt nicht mehr getrennt zu werden brauchen, $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ nur die Werte 1, ζ^a und ζ^β, und

---

*) *K. Hensel*, Die Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symboles für allgemeine algebraische Körper. Ds. Journal Bd. 147, S. 233–248.

man kann nun das allgemeine Resultat dieser Untersuchung in dem folgenden bemerkenswert einfachen Satz aussprechen:

> In dem durch die reine Gleichung $x^l = A$ definierten *Kummer*schen Körper zerfällt ein beliebiger Primteiler $\mathfrak{p}$ des Kreisteilungskörpers $K(\zeta)$ in l verschiedene Primdivisoren oder in l gleiche Primteiler ersten Grades, oder er bleibt unzerlegbar, jenachdem das reduzierte *Legendre*sche Symbol $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ von A gleich 1, ζ^α oder ζ^β ist.

Denselben Satz kann man auch in der folgenden Form aussprechen:

> In dem durch die reine Gleichung $x^l = A$ definierten *Kummer*schen Körper zerfällt ein Primteiler $\mathfrak{p}$ des Kreisteilungskörpers $K(\zeta)$ in l verschiedene oder in l gleiche Primteiler ersten Grades, oder er bleibt unzerlegbar, jenachdem A innerhalb $K(\mathfrak{p})$ l^{ter} Potenzrest ist, oder die Relativdiskriminante des *Kummer*schen Körpers $\mathfrak{p}$ enthält, oder endlich keine dieser beiden Möglichkeiten eintritt.

Zum Beweise dieses Satzes bemerke ich zunächst, daß nach dem vorigen Satze dann und nur dann der erste Fall eintritt, wenn $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$, wenn also A l^{ter} Potenzwert zu $\mathfrak{p}$ ist. Zweitens zeige ich leicht, daß in den beiden Fällen $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_l$ und $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1$ die Relativdiskriminante $D(\mathfrak{p})$ sicher nicht $\mathfrak{p}$ enthält; denn im ersten Falle ist $D(\mathfrak{p}) \sim D(\mathfrak{P}_1) \dots D(\mathfrak{P}_l)$, und die l rechts stehenden Diskriminanten sind alle äquivalent 1. Im zweiten Falle $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1$ wo $\mathfrak{p}$ in $K(x)$ unzerlegbar ist, besitzt jede primitive Einheit dieses Körpers l modulo $\mathfrak{p}$ inkongruente Konjugierte, also ist schon ihre Gleichungsdiskriminante durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar. Dagegen ist im Falle $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}^l$ die Diskriminante $D(\mathfrak{p})$ sicher durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Ist nämlich hier π eine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{P}$, so bilden ja die l Potenzen $(1, \pi, \dots \pi^{l-1})$ ein Fundamentalsystem für den Bereich von $\mathfrak{P}$, und $D(\mathfrak{p})$ ist die Diskriminante der Gleichung

$$g(\pi) = \pi^l + p_1 \pi^{l-1} + \dots + p_l = 0$$

welcher π genügt. Dies ist eine *Eisenstein*sche Gleichung, deren Koeffizienten alle mindestens durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Daraus folgt, daß ihre Ableitung $g'(\pi) = l\pi^{l-1} + \dots + p_{l-1}$, d. h. ihre Differente und somit auch ihre Norm, d. h. die Körperdiskriminante durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Hiermit ist auch der letzte Satz in seinem vollen Umfang bewiesen.

Grad. R. R. 3

OCT 15 1921

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Band 151.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 30. Juli.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1921

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 48 Mark

Band 151. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Fraenkel, Adolf, Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe . . . Seite 121
Horn, J., *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen . . . . . — 167
Hensel, Kurt, Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper . . . . . — 200
Hensel, Kurt, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers . . . . . — 210

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die seit der Preisfestsetzung für den letzterschienenen (150.) Band abermals nicht unerheblich gestiegenen Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 151. Bande ab auf M. 48.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Wegen der jetzigen hohen Herstellungskosten sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können. Er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10

Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe*).

Von Herrn *Adolf Fraenkel* in Marburg a. d. L.

Einleitung.

In einem im Jahre 1914 in diesem Journal erschienenen Aufsatze**) — dessen Kenntnis im folgenden nicht vorausgesetzt wird — habe ich aus der Gesamtheit der Ringe, d. h. der Bereiche mit allgemein ausführbarer Addition, Subtraktion und Multiplikation und mit einem Einheitselement, eine besondere Klasse von Ringen hervorgehoben und näher untersucht, die der „zerlegbaren Ringe“; diese sind dadurch ausgezeichnet, daß sich in ihnen die Null im wesentlichen eindeutig in „Primteiler der Null“ zerlegen läßt. Es ergab sich u. a., daß die algebraische Betrachtung eines beliebigen zerlegbaren Ringes vollkommen zurückgeführt werden kann auf die Betrachtung endlich oder unendlich vieler „einfacher Ringe“, d. h. solcher Ringe, die im wesentlichen nur einen einzigen Primteiler der Null enthalten.

Herr *Steinitz* hat in seiner großen Abhandlung vom Jahre 1910 über die „Algebraische Theorie der Körper***) die schon vorher teilweise in

*) Der vorliegende Aufsatz stellt eine Bearbeitung gewisser Teile (aus Kap. II und III) meiner 1916 bei Teubner erschienenen Habilitationsschrift („Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen“) dar, in der man auch manches hier Berührte weiter ausgeführt findet. Die Verzögerung der vorliegenden, Ende 1918 eingelieferten Veröffentlichung war durch die Verhinderung des bis dahin im Feld stehenden Verfassers bedingt.

**) „Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen“; Bd. 145, S. 139—176. Im folgenden zitiert als „R I“.

***) Dieses Journal, Bd. 137, S. 167—309.

Angriff genommene Frage erschöpfend beantwortet, inwieweit sich gewisse grundlegende algebraische Methoden und Ergebnisse allgemeiner Natur, die für spezielle Zahlkörper, namentlich denjenigen der rationalen Zahlen, wohlbekannt sind, auf beliebige (lediglich abstrakt definierte) Körper übertragen lassen. Bei der verhältnismäßig nahen Verwandtschaft, die zwischen Körpern und zerlegbaren Ringen besteht, liegt es nahe, diese Fragestellung auch auf zerlegbare Ringe auszudehnen; nach dem im vorigen Absatz angeführten Ergebnis genügt es zu diesem Zweck, sich auf die Untersuchung der einfachen Ringe zu beschränken. Bei näherer Beschäftigung mit dieser Aufgabe zeigt sich bald, daß die hierbei auftretenden Schwierigkeiten andersartig und ganz wesentlich tieferliegend sind als bei Körpern; demgemäß wird man sich vorläufig damit begnügen müssen, hier die einfachsten und grundlegendsten Aufgaben in Angriff zu nehmen.

Im vorliegenden Aufsatz soll nun die Frage beantwortet werden, ob und auf welche Weise ein beliebiger zerlegbarer Ring einer einfachen (algebraischen oder transzendenten) Erweiterung fähig ist. Das wesentliche und unentbehrliche Hilfsmittel zur Bewältigung dieser Aufgabe stellt das Euklidische Teilverfahren dar. Dieses Verfahren von Körpern auf einfache Ringe zu übertragen, begegnet aber zunächst erheblichen Schwierigkeiten, die durch ein im folgenden als „Fundamentalsatz“ bezeichnetes Theorem aus dem Wege geräumt werden. Insofern steht der Beweis des Fundamentalsatzes im Mittelpunkt der nachfolgenden Überlegungen. Andererseits dürfte der Fundamentalsatz, der sich auf ganze Funktionen mit Koeffizienten aus einem einfachen Ring (z. B. dem Kongruenzklassensystem für eine Primzahlpotenz) bezieht, auch selbständiges Interesse beanspruchen.

I. Kapitel. Das Euklidische Teilverfahren für Funktionen mit Koeffizienten aus einem einfachen Ring.

§ 1. Die zerlegbaren Ringe und ihre wichtigsten Eigenschaften.

Unter einem Ring*) soll ein System $\mathfrak{R}$ von Elementen verstanden werden, in dem eine den üblichen Bedingungen genügende *Relation* als

*) Für eine eingehendere Definition des Ringes durch unabhängige und möglichst wenig fordernde Bedingungen sei verwiesen auf R I, § 1. Sachlich unterscheidet sich die hier gegebene Definition von der dortigen allein durch das hier ge-

Gleichheit erklärt ist und in dem durch zwei *Operationen* der Addition und der Multiplikation aus je zwei Ringelementen a und b stets eindeutig je ein drittes als Summe $a+b$ und als Produkt $a \cdot b$ gewonnen werden kann. Der Ring und die sonst ganz willkürlich definierten Operationen müssen dabei folgenden Bedingungen genügen:

1. *Dem assoziativen Gesetz der Addition:* $(a+b)+c=a+(b+c)$.
2. *Dem assoziativen Gesetz der Multiplikation:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. *Dem kommutativen Gesetz der Multiplikation:* $a \cdot b = b \cdot a$.
4. *Dem distributiven Gesetz:* $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
5. *Dem Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion:* Es gibt in $\mathfrak{R}$ je ein einziges*) Element x bzw. y, das die Gleichung

$$a+x=b \text{ bzw. } y+a=b$$

befriedigt.

Bevor die sechste und letzte Bedingung ausgesprochen wird, ist eine kurze Bemerkung voranzuschicken. Man folgert in bekannter Weise aus den bisherigen Eigenschaften eines Ringes, daß jeder Ring ein in bezug auf die Addition beiderseits neutrales Element O, die Null oder das Nullelement, und kein zu ihm ungleiches Element enthält, das den Beziehungen

$$a+O=O+a=a$$

für jedes Ringelement a genügt. Es werde nun erklärt:

Definition 1: Ist $a \cdot b = O$, aber $b \neq O$, so heißt a ein Nullteiler; jedes Ringelement, das kein Nullteiler ist, wird als reguläres Ringelement bezeichnet.

Dann muß der Ring $\mathfrak{R}$ endlich als letzter Bedingung genügen:

6. *Dem Gesetz der unbeschränkten Division durch reguläre Elemente:* $\mathfrak{R}$ enthält mindestens *ein* reguläres Element**), und ist a ein reguläres,

---

forderte kommutative Gesetz der Multiplikation: die in R I benutzte Modifikation dieses Gesetzes würde für die in betracht kommenden Anwendungen der folgenden Ergebnisse bedeutungslos sein.

*) Eine solche Ausdrucksweise soll nie das Vorhandensein von unter einander gleichen Ringelementen ausschließen.

**) Diese Existenzforderung schließt nicht nur die trivialen Ringe aus, deren Elemente sämtlich gleich Null sind, sondern auch nichttriviale Systeme, wie z. B. das

b ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ mindestens ein Element x, das die Gleichung $a \cdot x = b$ befriedigt.

Aus dieser Bedingung ergibt sich in Verbindung mit den früheren, insbesondere mit dem kommutativen Gesetz der Multiplikation, in bekannter Weise die Existenz eines einzigen für die Multiplikation beiderseits neutralen Elements ε, des Einheitselements, das für alle Ringelemente a den Beziehungen $a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a = a$ genügt; alsdann folgt leicht die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes der Addition.

Zusammenfassend läßt sich der so definierte Begriff eines Ringes $\mathfrak{R}$ auch dadurch vollkommen charakterisieren, daß die Gesamtheit *aller* Elemente von $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Addition, die Gesamtheit der *regulären* Elemente von $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe bildet und daß beide Operationen kommutativ sind und durch das distributive Gesetz miteinander verknüpft werden. Enthält der Ring außer der Null selbst keinen Nullteiler, so ist er ersichtlich ein Körper.

Aus den angeführten Bedingungen folgen für die Ringe die wichtigsten Eigenschaften der Körper, mit Ausnahme der auf die Division bezüglichen und des Satzes, wonach in einem Körper ein Produkt nur zugleich mit einem seiner Faktoren verschwinden kann*). Wie üblich werde das zu einem Element a additiv entgegengesetzte Element mit $(-a)$, das zu einem regulären Element a multiplikativ entgegengesetzte oder reziproke mit a^{-1} oder $\frac{\varepsilon}{a}$ bezeichnet. Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß zu einem Nullteiler a von $\mathfrak{R}$ kein reziprokes Element in $\mathfrak{R}$ existieren kann. Denn es sei etwa $a \cdot b = O$, $b \neq O$; gäbe es dann a^{-1} derart, daß $a \cdot a^{-1} = \varepsilon$ wäre, so folgte $b = b \cdot a \cdot a^{-1} = O \cdot a^{-1} = O$ gegen die Voraussetzung.

Für das Nächstfolgende sind noch zwei Definitionen voranzuschicken:

Definition 2: Ist $a = b \cdot c$, so heißt a durch c teilbar, ein Vielfaches von c, c ein Teiler von a, in a enthalten usw. Ist sowohl a durch c wie auch c durch a teilbar, so heißen a und c unwesentlich verschieden oder äquivalent ($a \sim c$); in jedem anderen

---

aller durch g teilbaren Kongruenzklassen mod. g^m, wo g und m natürliche Zahlen > 1 bedeuten.

*) Im einzelnen vgl. hierzu R I, Sätze 1–3 des § 1.

Fall heißen a und c wesentlich verschieden. Ist a durch c, aber nicht c durch a teilbar, so heißt c ein echter Teiler von a.

Definition 3: Ein Ring heißt endlich oder unendlich, je nachdem die Anzahl seiner ungleichen Elemente endlich oder unendlich ist.

Im folgenden werden nun nicht ganz allgemeine Ringe betrachtet, sondern nur „zerlegbare Ringe endlichen Grades“ (in der Terminologie von R I)*), d. h. Ringe, die außer den bisherigen sechs noch folgende zwei Bedingungen befriedigen:

I. *Der Ring $\mathfrak{R}$ enthält nur endlich viele wesentlich verschiedene Nullteiler* (Gradbedingung); der Ring kann dabei natürlich sehr wohl unendlich sein.

II. *Sind a, b, c Elemente aus $\mathfrak{R}$ und ist $a \cdot b$ durch c teilbar, so läßt sich c derart als Produkt $c = c_1 \cdot c_2$ darstellen, daß a durch c_1 und b durch c_2 teilbar ist* (Zerlegbarkeitsbedingung).

Die Zerlegbarkeitsbedingung II ist offenbar z. B. (für andere Fälle vgl. R I, S. 152 und 155) stets erfüllt in Ringen, deren Primteiler (vgl. die nachfolgende Definition 4) sämtlich untereinander äquivalent sind; in der Hauptsache kommen nur solche Ringe im folgenden vor.

Ringe, die außer den sechs Ringbedingungen und der Gradbedingung I noch die Zerlegbarkeitsbedingung II erfüllen, sollen zerlegbare Ringe heißen. Zur Unterscheidung soll jeder nicht notwendig als zerlegbar vorausgesetzte Ring als nichtzerlegbarer Ring bezeichnet werden.

Die natürlichen Vielfachen und die natürlichen Potenzen eines beliebigen Ringelementes a werden in üblicher Weise bezeichnet, sodaß $1a$ für a, $2a$ für $a + a$ usw., a^1 für a, a^2 für $a \cdot a$ usw. geschrieben wird. Unter a^0 soll das Einheitselement des Ringes verstanden werden. Das Rechnen mit diesen Vielfachen gehorcht den gewöhnlichen Regeln.

Es sollen noch einige Definitionen und Sätze über (zerlegbare) Ringe angeführt werden, von denen aber Def. 6 und die Sätze 3—6 im folgenden nur ausnahmsweise (in Kap. II, §§ 2 und 5) benutzt werden und zunächst überschlagen werden können. Für die Beweise ist auf R I zu verweisen.

---

*) Die Einbeziehung der zerlegbaren Ringe *unendlichen* Grades würde keine wesentlichen grundsätzlichen Schwierigkeiten verursachen, wohl aber gewisse dem Gegenstand wesensfremde Hilfsbetrachtungen erforderlich machen.

Gegeben sei ein Ring $\mathfrak{R}$, der allen Bedingungen 1—6 sowie I und II genügt.

Definition 4: Ein Nullteiler aus $\mathfrak{R}$, der — abgesehen von regulären Elementen — keinen echten Teiler besitzt, heißt ein Primteiler von $\mathfrak{R}$ (R I, § 2, Def. 1).

Satz 1: *Jeder Nullteiler von $\mathfrak{R}$ enthält mindestens einen Primteiler von $\mathfrak{R}$ und läßt sich als Produkt von lauter Primteilern darstellen. In $\mathfrak{R}$ ist stets eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Primteilern enthalten; dann und nur dann ist die Null selbst ein Primteiler (und zwar der einzige), wenn $\mathfrak{R}$ ein Körper ist* (ebenda, Satz 1 und 3).

Satz 2: *Zu jedem Primteiler p von $\mathfrak{R}$ gibt es eine von p abhängige natürliche Zahl m derart, daß die Potenzen $p, p^2, \ldots, p^m$ alle untereinander wesentlich verschieden, alle folgenden Potenzen $p^{m+1}, p^{m+2}, \ldots$ dagegen zueinander und zu p^m äquivalent sind* (ebenda, Satz 6).

Die Sätze 1 und 2 (nicht aber die folgenden) gelten auch in Ringen, für die die Zerlegbarkeitsbedingung II nicht erfüllt ist, wenn nur die Gradbedingung I befriedigt wird.

Definition 5: Die in Satz 2 ausgedrückte Beziehung des Primteilers p zur natürlichen Zahl m wird bezeichnet durch die Ausdrucksweise: Der Primteiler p steigt in $\mathfrak{R}$ bis zum Exponenten m. Ferner heißt $P = p^m$ ein zum Primteiler p von $\mathfrak{R}$ gehöriger Primärteiler (ebenda, S. 159); dieser ist offenbar dann und (in einem zerlegbaren Ring $\mathfrak{R}$) auch nur dann gleich Null, wenn alle Primteiler von $\mathfrak{R}$ untereinander äquivalent sind.

Satz 3: *Von irgend zwei äquivalenten Elementen aus $\mathfrak{R}$ kann jedes durch Multiplikation mit einem regulären Ringelement in das andere übergeführt werden* (ebenda, § 3, Satz 6).

Definition 6: Ist P ein zum Primteiler p aus $\mathfrak{R}$ gehöriger Primärteiler und $\bar{P}$ ein durch p nicht teilbares Ringelement, das der Beziehung $P \cdot \bar{P} = O$ genügt, so heißt $\bar{P}$ ein dem Primteiler p komplementärer Orthogonalteiler. Ein Orthogonalteiler $\bar{P}$, der der Beziehung $\bar{P} \cdot \bar{P} = \bar{P}$ genügt, wird als ein normierter Orthogonalteiler bezeichnet (ebenda, § 4, Def. 1 und § 3, Def. 1).

Satz 4: *Zu jedem Primteiler von $\mathfrak{R}$ gehört ein — und abgesehen von äquivalenten Elementen auch nur ein — ihm komplementärer Orthogonalteiler. Die Gesamtheit aller zu einem Orthogonalteiler äquivalenten Elemente von $\mathfrak{R}$ bildet in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe, es gibt unter ihnen also einen einzigen dem Primteiler p komplementären normierten Orthogonalteiler* (ebenda, § 4, Satz 2).

Satz 5: *Ein dem Primteiter p komplementärer Orthogonalteiler ist durch alle Primärteiler von $\mathfrak{R}$, ausgenommen die zu p gehörigen Primärteiler, teilbar; das Produkt irgend zweier wesentlich verschiedener Orthogonalteiler aus $\mathfrak{R}$ ist daher stets gleich Null. Die Summe aller normierten Orthogonalteiler aus $\mathfrak{R}$ ist gleich dem Einheitselement ε von $\mathfrak{R}$* (ebenda, Satz 1 und Satz 3).

Definition 7: Ein Ring heißt einfach, wenn alle seine Primteiler untereinander äquivalent sind (ebenda, Def. 3).

Satz 6: *Ein zerlegbarer Ring $\mathfrak{R}$, der n wesentlich verschiedene Primteiler $p_1, p_2, \ldots, p_n$ enthält, läßt sich stets und nur auf eine einzige Weise in n und nicht weniger einfache Ringe $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ zerlegen derart, daß jeder dieser einfachen Ringe nur Elemente aus $\mathfrak{R}$ enthält, kein Element aus $\mathfrak{R}$ (außer der in jedem $\mathfrak{R}_i$ enthaltenen Null) in zwei verschiedenen der Ringe $\mathfrak{R}_i$ vorkommt, daß ferner das Produkt irgend welcher Elemente aus zwei verschiedenen Ringen $\mathfrak{R}_i$ stets gleich Null ist und schließlich sich jedes Element aus $\mathfrak{R}$ auf eine und nur eine einzige Weise als Summe je eines Elements aus jedem der n Ringe $\mathfrak{R}_i$ darstellen läßt. Bei geeigneter Numerierung enthällt der einfache Ring $\mathfrak{R}_i$ alle und nur die Elemente von $\mathfrak{R}$, die durch den dem Primteiler p_i komplementären Orthogonalteiler $\bar{P}_i$ teilbar sind* (ebenda, Satz 7).

Zur Erläuterung und zur Veranschaulichung der angeführten Definitionen und Sätze sei schließlich der Hinweis auf *eine sehr einfache Klasse spezieller (und zwar endlicher) zerlegbarer Ringe* angefügt, die auch im folgenden gelegentlich als Beispiel herangezogen werden sollen (vgl. R I, S 147).

m sei eine beliebige natürliche Zahl > 1. Es sollen die Klassen derjenigen ganzen Zahlen betrachtet werden, die der Reihe nach den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m-1$ modulo m kongruent sind, und diese Klassen selbst mögen mit $0, 1, \ldots, m-1$ bezeichnet werden. Setzt man fest, daß die

Addition, Subtraktion, Multiplikation und, soweit möglich, auch die Division dieser Klassen in der gewöhnlichen Weise, nur stets modulo m, ausgeführt werden soll, so stellt das System dieser Klassen einen Ring dar, der allen Bedingungen 1—6 sowie I und II genügt, den Ring R_m der Kongruenzklassen modulo m.

Er ist dann und nur dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist; im gegenteiligen Fall enthält er außer der Null noch weitere Nullteiler, nämlich alle und nur diejenigen Klassen, die (im gewöhnlichen Sinn) mit m gemeinsame Teiler besitzen, während die zu m teilerfremden Klassen reguläre Ringelemente darstellen.

Es sollen so am Beispiel des Ringes R_{360} der Kongruenzklassen mod. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ die angeführten Definitionen und Sätze kurz erläutert werden. Primteiler von R_{360} sind alle Klassen, die entweder durch 2, aber weder durch 4, noch durch 3, noch durch 5 — oder durch 3, aber weder durch 9, noch durch 2, noch durch 5 — oder durch 5, aber weder durch 2, noch durch 3 teilbar sind, also die Klassen:

$$2,\ 14,\ 22,\ldots;\ 3,\ 21,\ 33,\ldots;\ 5,\ 25,\ 35,\ldots.$$

Die Primteiler jeder dieser drei Arten sind jeweils untereinander äquivalent. Z. B. ist $25 = 5 \cdot 5$ ein zu 5 äquivalenter Primteiler; 5 ist nämlich kein echter Teiler von 25, weil auch $5 = 25 \cdot 29$.

Der Primteiler 2 von R_{360} und die äquivalenten steigen bis zum Exponenten 3, der Primteiler 3 bis zum Exponenten 2, der Primteiler 5 bis zum Exponenten 1; z. B. ist $2^3 \sim 2^4$ wegen $16 = 2 \cdot 8$, $8 = 23 \cdot 16$. Die zum Primteiler 2 gehörigen Primärteiler sind 8, 16, 32, 56,...; die zum Primteiler 3 gehörigen 9, 27, 63,...; die zum Primteiler 5 gehörigen 5, 25, 35,....

Die Orthogonalteiler von R_{360} sind: 72, 144, 216, 288 (komplementär zum Primteiler 5); 40, 80, 160, 200, 280, 320 (komplementär zu 3); 45, 135, 225, 315 (komplementär zu 2). Die normierten Orthogonalteiler sind: 216, 280, 225. Es ist in R_{360} $216 + 280 + 225 = 1$.

Die drei einfachen Ringe, in die sich R_{360} im Sinne von Satz 6 zerlegen läßt, sind die Ringe (0, 72, 144, 216, 288),

(0, 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320),

(0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315).

(Der erste dieser drei einfachen Ringe ist im besonderen ein Körper.)

§ 2. Der Ring $\mathfrak{R}(x)$ der rationalen Funktionen einer Variabeln mit Koeffizienten aus einem einfachen Ring.

$\mathfrak{R}$ bezeichne in diesem Kapitel von nun an stets einen bestimmten *einfachen* Ring (Def. 7 des vorigen Paragraphen), der daher um so mehr zerlegbar ist. p sei ein beliebiger, aber ein für allemal festgewählter Primteiler von $\mathfrak{R}$, dem daher *alle* Primteiler von $\mathfrak{R}$ äquivalent sind, und M sei der Exponent, bis zu dem p in $\mathfrak{R}$ steigt, so daß also $p^{M-1} \neq O$, $p^M = O$ ist (Def. 5 des vorigen Paragraphen, S. 126).

$\mathfrak{R}(x)$ bezeichne das System aller Ausdrücke der Form

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_m \cdot x^m}{b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots + b_n \cdot x^n},$$

in denen m und n beliebige ganze nicht negative Zahlen, a_i und b beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$ darstellen mit der einzigen Beschränkung, daß *nicht alle Elemente b_i durch den Primteiler p teilbar sein sollen*, also mindestens eines von ihnen in $\mathfrak{R}$ regulär ist; x wird im allgemeinen als ein bloßes Symbol betrachtet werden, für das gelegentlich auch ein Elementenwert aus $\mathfrak{R}$ eingesetzt werden kann. Ein Ausdruck $r(x)$ dieser Art soll als eine Funktion von x im Ringe $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden und zwar als eine eigentliche Funktion, wenn er keinem Element von $\mathfrak{R}$ gleich ist, im anderen Fall als eine Zahlfunktion. Die Bezeichnungen Zähler und Nenner sowie Koeffizient werden in der üblichen Weise gebraucht. Ist der Nenner von $r(x)$ eine reguläre Zahlfunktion, so daß $r(x)$ ohne Nenner geschrieben werden kann, so heiße $r(x)$ und jede (im Sinn der sogleich anzugebenden Erklärung) zu $r(x)$ gleiche Funktion eine ganze Funktion.

Sind alle Koeffizienten a_i des Zählers durch p^k, aber mindestens einer von ihnen nicht durch p^{k+1} teilbar, so werde p^k der Zahlenteiler der Funktion $r(x)$ genannt. Ist der Zahlenteiler p^0, also mindestens einer der Koeffizienten a_i regulär, so heiße $r(x)$ eine primitive Funktion.

Die Gleichheit, Addition, Subtraktion und Multiplikation von Funktionen sowie die Division durch primitive Funktionen sollen in der gewöhnlichen Weise erklärt werden. Demnach heißen zwei ohne Nenner

geschriebene Funktionen dann und nur dann gleich, wenn sie identisch sind; es sei ferner

$$(a_0 + a_1 . x + a_2 \cdot x^2 + \cdots) \pm (b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots)$$
$$= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) \cdot x + (a_2 \pm b_2) \cdot x^2 + \cdots,$$
$$(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots)$$
$$= a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) . x + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \cdot x_2 + \cdots.$$

Bezeichnen $G(x)$ und $H(x)$ beliebige ganze, $g(x)$ und $h(x)$ ganze primitive Funktionen, so gelte

$$\frac{G(x)}{g(x)} = \frac{H(x)}{h(x)}, \text{ falls } G(x) \cdot h(x) = H(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{G(x)}{g(x)} \pm \frac{H(x)}{h(x)} = \frac{G(x) \cdot h(x) \pm H(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot h(x)}$$

$$\frac{G(x)}{g(x)} \cdot \frac{H(x)}{h(x)} = \frac{G(x) \cdot H(x)}{g(x) \cdot h(x)}.$$

Nach diesen Definitionen gilt:

Das System $\mathfrak{R}(x)$ aller Funktionen von x im einfachen Ring $\mathfrak{R}$ stellt wiederum einen einfachen Ring dar, dessen Primteiler den Primteilern von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}(x)$ äquivalent sind.

Beweis: Um zunächst zu zeigen, daß die erklärten Operationen innerhalb $\mathfrak{R}(x)$ unbeschränkt und eindeutig ausführbar sind, ist vor allem nachzuweisen, daß das Produkt zweier ganzer primitiver Funktionen wieder primitiv ist. Es seien also

$$g(x) = g_m \cdot x^m + g_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + g_1 \cdot x + g_0$$
$$h(x) = h_n \cdot x^n + h_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + h_1 \cdot x + h_0$$

zwei ganze primitive Funktionen in $\mathfrak{R}$; von den *regulären* Koeffizienten von $g(x)$ bzw. $h(x)$ sei g_i bzw. h_k derjenige mit dem höchsten Index. Dann ist der Koeffizient p_{i+k} von x^{i+k} in dem Produkt $p(x) = g(x) \cdot h(x)$:

$$p_{i+k} = g_m \cdot h_{i+k-m} + g_{m-1} \cdot h_{i+k-m+1} + \cdots$$
$$+ g_{i+1} \cdot h_{k-1} + g_i \cdot h_k + g_{i-1} \cdot h_{k+1} + \cdots$$
$$+ g_{i+k-n+1} \cdot h_{n-1} + g_{i+k-n} \cdot h_n,$$

wobei — wie stets im folgenden — Koeffizienten mit negativem Index gleich Null zu setzen sind. Nach der über g_i und h_k gemachten Voraussetzung sind aber $g_m, g_{m-1}, \ldots, g_{i+1}, h_n, h_{n-1}, \ldots, h_{k+1}$ sämtlich durch den Primteiler p von $\mathfrak{R}$ teilbar, während $g_i \cdot h_k$ als Produkt regulärer Elemente

von $\mathfrak{R}$ selbst regulär ist; daher ist p_{i+k} regulär in $\mathfrak{R}$, also $p(x)$ in der Tat eine ganze *primitive* Funktion von $\mathfrak{R}(x)$. Hieraus folgt sofort, daß auch das Produkt gebrochener primitiver Funktionen wiederum primitiv ist.

Die Bildung von p_{i+k} zeigt, daß in $p(x)$ die Koeffizienten der Potenzen $x^{m+n}, x^{m+n-1}, \ldots, x^{i+k+2}, x^{i+k+1}$ sämtlich durch p teilbar sind. Es ergibt sich also der später zu benutzende

Hilfssatz: *In dem Produkt $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ ist der Index des höchsten regulären Koeffizienten von $p(x)$ gleich der Summe der Indizes der höchsten regulären Koeffizienten von $g(x)$ und $h(x)$.*

Ebenso wie bei gewöhnlichen rationalen Funktionen ist nun zu schließen, daß die definierte Gleichheit den an jede Gleichheitsrelation zu stellenden Bedingungen genügt, daß Addition und Multiplikation innerhalb $\mathfrak{R}(x)$ unbeschränkt und eindeutig ausführbar sind und daß dabei die Bedingungen 1—5 des vorigen Paragraphen allgemein erfüllt werden; das Nullelement von $\mathfrak{R}(x)$ ist offenbar die Zahlfunktion O. Dem Nachweis, daß auch Bedingung 6 in $\mathfrak{R}(x)$ befriedigt ist, seien noch einige fast selbstverständliche Sätze vorangeschickt:

1. *Eine Funktion $r(x)$ in $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann durch die Potenz p^k des Primteilers p von $\mathfrak{R}$ teilbar, wenn sämtliche Koeffizienten ihres Zählers mindestens durch p^k teilbar sind; sie verschwindet dann und nur dann, wenn sie identisch gleich Null ist.*

2. *Jede von Null verschiedene Funktion $r(x)$ läßt sich als Produkt aus ihrem Zahlenteiler und einer primitiven Funktion $r_0(x)$ darstellen in der Form $r(x) = p^k \cdot r_0(x)$.*

Diese Darstellung wird zwar im allgemeinen nicht eindeutig sein, da statt $r_0(x)$ offenbar auch jede von $r_0(x)$ um ein Vielfaches von p^{M-k} additiv verschiedene Funktion eingesetzt werden kann. Doch ist der Faktor p^k nach der Definition des Zahlenteilers eindeutig bestimmt, und der zweite Faktor $r_0(x)$ ist wenigstens unter allen Umständen primitiv.

3. *Nullteiler von $\mathfrak{R}(x)$ sind alle und nur die durch p teilbaren Funktionen, insbesondere Primteiler alle und nur die Funktionen vom Zahlenteiler p.*

Diese beiden Behauptungen folgen unmittelbar aus der Darstellung der Funktionen als Produkt aus Zahlenteiler und primitiver Funktion unter Benutzung des Satzes, daß das Produkt primitiver Funktionen selbst primitiv ist.

Jetzt ist sofort zu sehen, daß auch die Bedingung 6 des vorigen Paragraphen in dem System $\mathfrak{R}(x)$ erfüllt ist. Denn nach dem letzten Satz decken sich die Begriffe „primitive Funktion in $\mathfrak{R}$" und „reguläres Element von $\mathfrak{R}(x)$"; durch primitive Funktionen kann aber unbeschränkt und eindeutig dividiert werden, da für *ganze* primitive Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ nach der Gleichheitsdefinition $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \cdot \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \varepsilon$ gilt, die beliebige primitive Funktion $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ also in $\mathfrak{R}(x)$ die offenbar eindeutig bestimmte Reziproke $\frac{g_2(x)}{g_1(x)}$ besitzt.

Hiernach sind ferner alle Funktionen vom nämlichen Zahlenteiler untereinander äquivalent, insbesondere also auch alle Funktionen vom Zahlenteiler p. Daher enthält $\mathfrak{R}(x)$ nicht zwei wesentlich verschiedene Primteiler. Da überdies in $\mathfrak{R}(x)$ gilt: $p^M = O$, so sind auch die Gradbedingung I und die Zerlegbarkeitsbedingung II des vorigen Paragraphen in $\mathfrak{R}(x)$ erfüllt, d. h. $\mathfrak{R}(x)$ bildet in der Tat einen einfachen Ring mit dem Primteiler p, wie bewiesen werden sollte.

§ 3. Der Fundamentalsatz. Das Euklidische Teilverfahren.

Der Ring $\mathfrak{R}(x)$ zeigt offenbar große Ähnlichkeit mit dem Körper $\mathfrak{K}(x)$ der rationalen Funktionen einer Variabeln x mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$. Der einzige sich zunächst zeigende wesentliche Unterschied, der in dem Auftreten von Nullteilern unter den Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ besteht, läßt sich für alle multiplikativen Fragen offenbar höchst einfach ausschalten vermöge der Darstellung jeder Funktion als Produkt aus Zahlenteiler und einer primitiven, also regulären Funktion. Der sich so in erster Linie der Betrachtung darbietende Bereich aller primitiven Funktionen bildet in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe.

Für die Lösung der gestellten Aufgabe, die Möglichkeit einer beliebigen einfachen Erweiterung eines zerlegbaren Ringes zu untersuchen,

ist die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ganzer Funktionen mit Koeffizienten aus einem Ring und die Einführung des Begriffs der Kongruenz zwischen solchen Funktionen unerläßlich. Hierzu bedarf es ganz ebenso wie bei Funktionen mit Koeffizienten aus einem Körper des Euklidischen Teilverfahrens als wesentlichen Hilfsmittels. Der Anwendung dieses Verfahrens stellt sich aber sogleich eine wesentliche Schwierigkeit in den Weg. Sind nämlich aus dem einfachen Ring $\mathfrak{R}(x)$ zwei ganze primitive Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ vorgelegt:

$$f(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$g(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0,$$

und ist a_m ein echter Teiler von b_n, d. h. enthält a_m den Primteiler p nicht in ebenso hoher Potenz wie b_n, so versagt das übliche Verfahren der Division von $f(x)$ durch $g(x)$. Der Überwindung dieser Schwierigkeit sollen die nächsten Überlegungen gewidmet sein.

Es werde erklärt:

Definition: Als Grad einer ganzen Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ werde wie gewöhnlich der Exponent der höchsten in $f(x)$ vorkommenden Potenz von x mit von Null verschiedenem Koeffizienten*) bezeichnet. Als Ordnung einer ganzen primitiven**) Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ werde hingegen bezeichnet der Exponent der höchsten in $f(x)$ vorkommenden Potenz von x, deren Koeffizient ein *reguläres* Element von $\mathfrak{R}$ ist.

Es wird sich zeigen, daß für eine ganze primitive Funktion in einem einfachen Ring die Ordnung eine weit wichtigere Zahl darstellt als der Grad, daß sie insbesondere die meisten der für die Funktion charakteristischen Eigenschaften aufweist, wie sie bei Funktionen in Körpern der Gradzahl zukommen. Offenbar ist die Ordnung einer ganzen primitiven Funktion gleich oder kleiner als ihr Grad. Besondere Hervorhebung verdienen einmal die Funktionen, bei denen Grad und Ordnung übereinstimmen, und ferner die Funktionen der Ordnung Null. Bei Funktionen der ersten Art ist der Koeffizient der höchsten Potenz

---

*) Die Null werde als von niedrigerem Grade als jede andere Funktion in $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

**) Die Ordnung läßt sich natürlich auch entsprechend für nichtprimitive Funktionen definieren; doch ist eine solche Ausdehnung der Definition fürs folgende unnötig und unpraktisch.

von x regulär; durch solche Funktionen kann also jede beliebige Funktion ohne weiteres formal ebenso dividiert werden, wie dies bei Funktionen mit Koeffizienten aus einem Körper geschieht. Die Bedeutung der Funktionen der Ordnung Null dagegen liegt darin, daß — wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird und wie bei Vorwegnahme des Begriffs der *Erweiterung* auch an dieser Stelle unmittelbar einleuchtet — eine ganze primitive Funktion der Ordnung Null in $\mathfrak{R}$ für jeden Wert der Variabeln x nicht nur aus $\mathfrak{R}$ selbst, sondern auch aus jeder beliebigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ stets von Null verschiedene Werte annimmt. Denn eine solche Funktion hat ja die Form

$$p \cdot \bar{a}_m \cdot x^m + p \cdot \bar{a}_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + p \cdot \bar{a}_1 \cdot x + a_0,$$

wo a_0 *regulär* ist; was für ein Wert immer hier für x eingesetzt wird, immer wird dieser Ausdruck als Summe aus einem durch p teilbaren und einem regulären Glied von O verschieden bleiben. Die ganzen primitiven Funktionen der Ordnung Null stellen daher eine naturgemäße Verallgemeinerung der regulären Zahlfunktionen, d. h. der regulären Elemente von $\mathfrak{R}$ dar.

Für die Ordnung eines Produktes gilt:

Die Ordnung eines Produktes ganzer primitiver Funktionen in $\mathfrak{R}$ ist gleich der Summe der Ordnungszahlen der Faktoren.

Dieser Satz, der für die Gradzahlen keineswegs entsprechend zutrifft, ist nur ein anderer Ausdruck des Hilfssatzes von S. 131.

Die vorher erwähnte Schwierigkeit, die sich der Durchführung des Euklidischen Teilverfahrens in $\mathfrak{R}(x)$ entgegenstellt, wird nun aus dem Wege geräumt durch den folgenden

Fundamentalsatz: *Jede ganze primitive Funktion der Ordnung n in dem einfachen Ring $\mathfrak{R}$ läßt sich durch Multiplikation mit einer ganzen primitiven Funktion der Ordnung Null in eine ganze primitive Funktion überführen, die gleichzeitig die Ordnung n und den Grad n besitzt.*

Dieser Satz besagt mehr, als daß sich zu jeder ganzen primitiven Funktion $f(x)$ eine weitere derart finden läßt, daß das Produkt beider, $g(x)$, die nämliche Ordnungszahl wie Gradzahl besitzt; darüber hinausgehend werden vielmehr $f(x)$ und $g(x)$ die gleiche Ordnung und sogar die nämlichen Nullstellen in $\mathfrak{R}$ haben.

Dem Beweis des Fundamentalsatzes ist der folgende Paragraph gewidmet. Hier sollen sogleich die nächsten Folgerungen gezogen werden.

Auf Grund des Fundamentalsatzes ist es leicht, zu jedem Paar ganzer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem einfachen Ring $\mathfrak{R}$, von denen die zweite Funktion $g(x)$ primitiv ist, das übliche Divisionsverfahren in der Form

$$f(x) = g(x) \cdot \bar{g}(x) + h(x) \tag{1}$$

auszuführen, wobei auch $\bar{g}(x)$ und $h(x)$ Funktionen in $\mathfrak{R}$ bedeuten und *der Grad von $h(x)$ kleiner ist nicht nur als der Grad, sondern auch als die Ordnung von $g(x)$.* Denn ist $g(x)$ von der Ordnung n, so kann man nach dem Fundamentalsatz eine ganze Funktion $g_0(x)$ in $\mathfrak{R}$ bestimmen, so daß $g(x) \cdot g_0(x) = G(x)$ eine Funktion von der Ordnung und dem Grade n wird; durch $G(x)$ läßt sich daher $f(x)$ ganz in der gewöhnlichen Weise dividieren, so daß

$$f(x) = G(x) \cdot \bar{G}(x) + h(x)$$

wird, wo der Grad von $h(x)$ kleiner als n ist. Die Gleichung (1) wird also durch $\bar{g}(x) = g_0(x) \cdot \bar{G}(x)$ erfüllt.

Andererseits sind die in der Beziehung (1) auftretenden Funktionen $\bar{g}(x)$ und $h(x)$ *eindeutig* bestimmt. Es seien nämlich die folgenden beiden Beziehungen erfüllt

$$f(x) = g(x) \cdot \bar{g}_1(x) + h_1(x)$$
$$f(x) = g(x) \cdot \bar{g}_2(x) + h_2(x),$$

wo sowohl der Grad von $h_1(x)$ wie derjenige von $h_2(x)$ kleiner sei als die Ordnung n von $g(x)$; dann folgt durch Subtraktion, wenn $\bar{g}_1(x) - \bar{g}_2(x) = \bar{g}_3(x)$ gesetzt wird:

$$O = g(x) \cdot \bar{g}_3(x) + h_3(x),$$

wo auch der Grad von $h_3(x) = h_1(x) - h_2(x)$ kleiner ist als n. Wäre nun $\bar{g}_3(x)$ nicht identisch gleich Null, so sei p^μ der Zahlenteiler von $\bar{g}_3(x)$, also $\bar{g}_3(x) = p^\mu \cdot \bar{g}_3^{(0)}(x)$, und die ganze primitive Funktion $\bar{g}_3^{(0)}(x)$ besitze die Ordnung m. Dann wäre die Ordnung von $g(x) \cdot \bar{g}_3^{(0)}(x)$ gleich $m+n$ (S. 134) und daher der Grad von $p^\mu \cdot g(x) \cdot \bar{g}_3^{(0)}(x) = g(x) \cdot \bar{g}_3(x)$ gleich oder größer als $m+n$, also mindestens gleich n; die diesem Produkt bis aufs Vorzeichen gleiche Funktion $h_3(x)$ besitzt aber nach Voraussetzung einen niedrigeren

Grad als n. Der Widerspruch zeigt, daß $\bar{g}_1(x)$ und $\bar{g}_2(x)$, also auch $h_1(x)$ und $h_2(x)$ identisch gleich sind. Es gilt also:

Korollar zum Fundamentalsatz: *Ist $f(x)$ eine beliebige ganze, $g(x)$ eine ganze primitive Funktion in dem einfachen Ring $\mathfrak{R}$, so lassen sich zu $f(x)$ und $g(x)$ auf eine und auch nur auf eine Weise zwei ganze Funktionen in $\mathfrak{R}$ $\bar{g}(x)$ und $h(x)$ von der Art bestimmen, daß*

$$f(x) = g(x) \cdot \bar{g}(x) + h(x) \tag{1}$$

wird und der Grad von $h(x)$ niedriger ist als die Ordnung von $g(x)$.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Die beiden gegebenen ganzen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, von denen $g(x)$ primitiv sein sollte, können *erstens* so beschaffen sein, daß bei Aufstellung der Gleichungskette des Euklidischen Teilverfahrens die erste nichtprimitive unter den auftretenden Restfunktionen gleich Null wird, oder es kann *zweitens* der Fall sein, daß man in jener Gleichungskette einmal auf eine durch p teilbare, aber von Null verschiedene Restfunktion stößt (die auch eine nichtreguläre Zahlfunktion sein kann).

Im ersten Fall erhält man wie bei Funktionen in Körpern eine Gleichungskette der Form

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \cdot \bar{g}(x) + h_1(x) \\
g(x) &= h_1(x) \cdot \bar{h}_1(x) + h_2(x) \\
&\vdots \\
h_{\mu-2}(x) &= h_{\mu-1}(x) \cdot \overline{h_{\mu-1}}(x) + h_\mu(x) \\
h_{\mu-1}(x) &= h_\mu(x) \cdot \bar{h}_\mu(x),
\end{aligned}$$

wo insbesondere auch $h_\mu(x)$ eine primitive Funktion ist. Wie die Rückwärtsverfolgung dieser Gleichungskette in der üblichen Weise zeigt, lassen sich dann zu den gegebenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze Funktionen in $\mathfrak{R}$ $F(x)$ und $G(x)$ derart finden, daß

$$f(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot F(x) = h_\mu(x)$$

wird.

Ist insbesondere die ganze primitive Funktion $h_\mu(x)$ *von der Ordnung Null*, so sollen $f(x)$ und $g(x)$ zu einander *relativ prim**) heißen.

---

*) Diese Erklärung fällt keineswegs mit der in Körpern verwendeten Definition zusammen. Es kann nämlich sehr wohl sein, daß es keine ganze primitive Funktion

In diesem Fall kann man, wie sich durch Anwendung des Fundamentalsatzes auf $h_\mu(x)$ ergibt, die Multiplikatoren $F(x)$ und $G(x)$ im besonderen so wählen, daß die Beziehung besteht:

$$f(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot F(x) = \varepsilon. \tag{2}$$

Es gilt aber auch die Umkehrung dieser Aussage, d. h. *zwei ganze Funktionen in* $\mathfrak{R}$ $f(x)$ *und* $g(x)$, *für die die Gleichung* (2) *erfüllt ist, sind stets zueinander relativ prim.* Angenommen nämlich, $f(x)$ und $g(x)$ seien *nicht* relativ prim; dies besagt nach Definition, daß entweder in der Euklidischen Gleichungskette die letzte vor der Null auftretende Restfunktion gleich allen vorangehenden primitiv und von positiver Ordnung ist oder in jener Kette einmal eine durch p teilbare, aber von Null verschiedene Restfunktion auftritt. Die Gleichungskette für $f(x)$ und $g(x)$ beginne also mit den Beziehungen

$$\left|\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot \bar{g}(x) + h_1(x) \\ g(x) &= h_1(x) \cdot \bar{h}_1(x) + h_2(x) \\ &\vdots \\ h_{\nu-3}(x) &= h_{\nu-2}(x) \cdot \overline{h_{\nu-2}}(x) + h_{\nu-1}(x) \\ h_{\nu-2}(x) &= h_{\nu-1}(x) \cdot \overline{h_{\nu-1}}(x) + p \cdot h_\nu(x), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wo die ganzen Funktionen $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{\nu-1}(x)$ sämtlich primitiv und von positiver Ordnung seien; dann folgt aus der letzten Gleichung dieser Kette wegen $p^M = O$:

$$p^{M-1} \cdot h_{\nu-2}(x) = p^{M-1} \cdot h_{\nu-1}(x) \cdot \overline{h_{\nu-1}}(x).$$

Durch sukzessive Multiplikation sämtlicher angeschriebenen Beziehungen mit p^{M-1} schließt man hieraus, daß $p^{M-1} \cdot f(x)$ und $p^{M-1} \cdot g(x)$ sich dar-

---

positiver Ordnung gibt, die durch Multiplikation mit geeigneten ganzen Funktionen in $f(x)$ und $g(x)$ übergeht, und daß dennoch $f(x)$ und $g(x)$ im Sinn der obenstehenden Definition *nicht* relativ prim sind. So sind z. B. die Funktionen $f(x) = x + p$, $g(x) = x$, wo p den Primteiler von $\mathfrak{R}$ bedeutet, nicht relativ prim, sondern entsprechend dem am Schluß dieses Paragraphen zu besprechenden zweiten Fall „verwandt“. Aus diesem Grund soll die Bezeichnung „teilerfremd“ an Stelle von „relativ prim“ ausgeschlossen bleiben. — Über den Wert der obigen Definition, die der in Ringen herrschenden größeren Mannigfaltigkeit der Verhältnisse entspricht, vgl. den Schlußsatz des § 3 von Kap. II (S. 154), den Satz 2 des § 4 von Kap. II (S. 159) und namentlich die bei dessen Beweis auf S. 158/9 gemachte Bemerkung.

stellen lassen in der Form

$$p^{M-1} \cdot f(x) = p^{M-1} \cdot h_{\nu-1}(x) \cdot F_0(x), \quad p^{M-1} \cdot g(x) = p^{M-1} \cdot h_{\nu-1}(x) \cdot G_0(x),$$

wo $F_0(x)$ und $G_0(x)$ ganze Funktionen in $\mathfrak{R}$ sind. Bestünde nun andererseits zwischen $f(x)$ und $g(x)$ eine Beziehung der Form (2), so wäre

$$p^{M-1} \cdot f(x) \cdot G(x) + p^{M-1} \cdot g(x) \cdot F(x) = p^{M-1};$$

hier ließe sich nach dem letzten Resultat die linke Seite auf die Form $p^{M-1} \cdot h_{\nu-1}(x) \cdot H(x)$ bringen, wo $H(x)$ eine ganze Funktion in $\mathfrak{R}$ ist, während die rechte Seite unmöglich in dieser Form dargestellt werden kann, weil ja $h_{\nu-1}(x)$ primitiv und *von positiver Ordnung* ist. Wie aus dem so erzielten Widerspruch hervorgeht, folgt in der Tat aus Gleichung (2), daß $f(x)$ und $g(x)$ relativ prim sind.

Es ist schließlich noch der zweite der beiden auf S. 136 unterschiedenen Fälle zu betrachten, daß man nämlich in der Gleichungskette des Euklidischen Teilverfahrens einmal auf eine durch p teilbare, aber von Null verschiedene Restfunktion stößt. Die Gleichungskette beginnt dann mit einem System der Form (3), in dem aber jetzt insbesondere $p \cdot h_\nu(x) \neq 0$ ist, und sie läßt sich in derselben Weise nicht weiter fortsetzen. In diesem Fall sollen die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ verwandt heißen; ihm steht kein entsprechender Fall bei Funktionen mit Koeffizienten aus einem Körper gegenüber, vielmehr ist er analog den aus der Idealtheorie bekannten Verhältnissen (vgl. S. 159).

§ 4. Beweis des Fundamentalsatzes.

Zum Beweis des Fundamentalsatzes (S. 134) kann offenbar der Einfachheit halber angenommen werden, daß sowohl der höchste reguläre Koeffizient der vorgelegten ganzen primitiven Funktion $f(x)$ wie auch das (der Annahme gemäß reguläre) konstante Glied der als Multiplikator gesuchten ganzen primitiven Funktion der Ordnung Null $f_0(x)$ beide gleich dem Einheitselement ε von $\mathfrak{R}$ sind. Es sei also die gegebene Funktion

$$f(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + a_{m-r+1} \cdot x^{m-r+1} + x^{m-r} + b_{m-r-1} \cdot x^{m-r-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0,$$

wo die Koeffizienten a_i $(a_m \neq O)$ sämtlich durch p teilbar sein sollen und $r > 0$ angenommen werden kann (da für $r = 0$ der zu beweisende Satz schon durch $f_0(x) = \varepsilon$ erfüllt wäre), während jeder der Koeffizienten b_i durch p teilbar oder regulär sein kann. $f(x)$ ist hiernach vom Grade m

und von der Ordnung $m-r$. Die als Multiplikator gesuchte Funktion $f_0(x)$ sei von der Form

$$f_0(x) = p_n \cdot x^n + p_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + p_1 \cdot x + \varepsilon,$$

wo die Koeffizienten p_i sämtlich durch p teilbare Elemente aus $\mathfrak{R}$ sein sollen, während im übrigen diese Koeffizienten und ebenso auch der Grad n von $f_0(x)$ noch unbekannt sind. *Diese n Koeffizienten und die natürliche Zahl n selbst sind nun so zu bestimmen, daß das Produkt*

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f_0(x) = g(x) = c_{m+n} \cdot x^{m+n} + c_{m+n-1} \cdot x^{m+n-1} \\ + \cdots + c_{m+1} \cdot x^{m+1} + c_m \cdot x^m + \cdots + c_{m-r+1} \cdot x^{m-r+1} \\ + c_{m-r} \cdot x^{m-r} + \cdots + c_1 \cdot x + c_0 \end{aligned}$$

nicht nur von der Ordnung $m-r$, sondern auch vom Grade $m-r$ werde. Ersteres ist nach dem dem Fundamentalsatz vorangestellten Satz über die Ordnung eines Produkts ganzer primitiver Funktionen (S. 134) von selbst der Fall, d. h. es werden alle Koeffizienten $c_{m+n}, c_{m+n-1}, \cdots, c_{m-r+2}, c_{m-r+1}$ durch p teilbar, dagegen c_{m-r} regulär sein. Darüber hinaus ist durch geeignete Wahl von $f_0(x)$ zu bewirken, *daß die $n+r$ Koeffizienten $c_{m+n}, \cdots, c_{m-r+1}$ nicht nur durch p teilbar, sondern sämtlich gleich Null werden.* Es sind also $n+r$ lineare (nicht sämtlich homogene) Gleichungen für die n Unbekannten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in dem einfachen Ringe $\mathfrak{R}$ aufzulösen.

Diese Aufgabe läßt sich nun wesentlich vereinfachen; *es genügt nämlich zu beweisen, daß $f_0(x)$ so gewählt werden kann, daß in $g(x) = f(x) \cdot f_0(x)$ wenigstens die $n+1$ ersten Koeffizienten $c_{m+n}, c_{m+n-1}, \cdots, c_{m+1}, c_m$ sämtlich verschwinden.*

In der Tat: auf diese Weise erhält man ja aus $f(x)$ durch Multiplikation mit einer Funktion der Ordnung Null $f_0(x)$ eine Funktion $g(x)$, deren Ordnung $m-r$ die gleiche wie die von $f(x)$ ist, während ihr Grad mindestens um 1 kleiner ist als der von $f(x)$, nämlich höchstens gleich $m-1$. Alsdann kann man ebenso zu $g(x)$ eine ganze primitive Funktion der Ordnung Null $f_1(x)$ bestimmen, so daß $g(x) \cdot f_1(x) = g_1(x)$ höchstens den Grad $m-2$, aber wiederum die Ordnung $m-r$ besitzt. Durch vollständige Induktion erkennt man so, daß man schließlich zu höchstens r ganzen primitiven Funktionen der Ordnung Null $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{r-1}(x)$ gelangt, deren Produkt $\bar{f}(x)$ ebenfalls primitiv ist und die Ordnung Null be-

sitzt und dabei die Eigenschaft hat, daß $f(x) \cdot \bar{f}(x)$ nicht nur von der Ordnung $m-r$, sondern auch vom Grad $m-r$ ist.

Es genügt demnach, den Beweis der im vorletzten Absatz angegebenen Tatsache zu führen. Es ist also zu zeigen, daß man eine natürliche Zahl n und ferner n durch p teilbare Elemente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus $\mathfrak{R}$ so finden kann, daß die folgenden $n+1$ Gleichungen in $\mathfrak{R}$ erfüllt werden (wobei $p_k = O$ gilt für $k > n$):

$$
\text{(I)}\quad
\begin{cases}
(1) & c_{m+n} = a_m \cdot p_n = O^* \\
(2) & c_{m+n-1} = a_m \cdot p_{n-1} + a_{m-1} \cdot p_n = O \\
(3) & c_{m+n-2} = a_m \cdot p_{n-2} + a_{m-1} \cdot p_{n-1} + a_{m-2} \cdot p_n = O \\
 & \vdots \\
(n_0) & c_{m+n-n_0+1} = a_m \cdot p_{n-n_0+1} + a_{m-1} \cdot p_{n-n_0+2} + \cdots \\
 & \qquad + a_{m-r+1} \cdot p_{n-n_0+r} + p_{n-n_0+r+1} + b_{m-r-1} \cdot p_{n-n_0+r+2} \\
 & \qquad + \cdots + b_1 \cdot p_{m+n-n_0} + b_0 \cdot p_{m+n-n_0+1} = O \\
(n_0+1) & c_{m+n-n_0} = a_m \cdot p_{n-n_0} + a_{m-1} \cdot p_{n-n_0+1} + \cdots + a_{m-r+1} \cdot p_{n-n_0+r-1} \\
 & \qquad + p_{n-n_0+r} + b_{m-r-1} \cdot p_{n-n_0+r+1} + \cdots + b_1 \cdot p_{m+n-n_0-1} \\
 & \qquad + b_0 \cdot p_{m+n-n_0} = O \\
 & \vdots \\
(n-1) & c_{m+2} = a_m \cdot p_2 + a_{m-1} \cdot p_3 + \cdots + a_{m-r+1} \cdot p_{r+1} + p_{r+2} \\
 & \qquad + b_{m-r-1} \cdot p_{r+3} + \cdots + b_1 \cdot p_{m+1} + b_0 \cdot p_{m+2} = O \\
(n) & c_{m+1} = a_m \cdot p_1 + a_{m-1} \cdot p_2 + \cdots + a_{m-r+1} \cdot p_r + p_{r+1} \\
 & \qquad + b_{m-r-1} \cdot p_{r+2} + \cdots + b_1 \cdot p_m + b_0 \cdot p_{m+1} = O \\
(n+1) & c_m = a_m + a_{m-1} \cdot p_1 + a_{m-2} \cdot p_2 + \cdots + a_{m-r+1} \cdot p_{r-1} + p_r \\
 & \qquad + b_{m-r-1} \cdot p_{r+1} + \cdots + b_1 \cdot p_{m-1} + b_0 \cdot p_m = O.
\end{cases}
$$

Um diese $n+1$ Gleichungen in dem einfachen Ringe $\mathfrak{R}$ nach den n Unbekannten $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ aufzulösen, hat man zu bedenken, daß vermöge des Ansatzes für $f_0(x)$ noch eine $(n+1)$-te Unbekannte p_0 mit dem allerdings im voraus bestimmten Werte ε zur Verfügung steht. Infolge der vorläufigen Unbestimmtheit der Zahl n kommt es jetzt nur darauf an, die angeschriebenen Gleichungen der Reihe nach in der Weise aufzulösen, daß man nach Bestimmung der n_0 ersten Unbekannten $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-n_0+1}$ aus den Gleichungen (1) bis (n_0) schließlich bei der Gleichung (n_0+1) zu einer Unbekannten p_{n-n_0} gelangt, für die der Wert $p_{n-n_0} = \varepsilon$ genommen werden kann. In der Tat: wählt man dann für n den Wert n_0, so werden durch

die gefundenen Werte $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ nicht allein die Gleichungen (1) bis (n), sondern auch die Gleichung $(n+1)$ identisch erfüllt.

Es ist jetzt also nur noch zu zeigen, *daß die Gleichungen des angeschriebenen Systems* (I) *in hinreichender Anzahl* (n ist ja unbestimmt) *sukzessiv im einfachen Ring* $\mathfrak{R}$ *gelöst werden können und daß man hierbei nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Lösung* $p_{n-n_0} = \varepsilon$ *gelangt.*

Zu diesem Nachweis werde gesetzt:

$$a_m = \alpha \cdot p^A,$$

wo α ein reguläres Element von $\mathfrak{R}$ bedeutet; die ganze positive Zahl A gibt demnach an, in welcher Potenz der Primteiler p von $\mathfrak{R}$ in dem (nach Voraussetzung jedenfalls durch p teilbaren) Koeffizienten a_m enthalten ist. Stellt wie bisher M den Exponenten dar, bis zu dem p in $\mathfrak{R}$ steigt, so werde ferner die ganze positive Zahl $M-A$ mit B bezeichnet. Schließlich bedeute β ein vorläufig unbestimmtes *reguläres* Element von $\mathfrak{R}$ und C eine gleichfalls vorläufig unbestimmte ganze Zahl innerhalb der Grenzen $0 \leqq C < A$, so daß $M-A \leqq B+C < M$ wird. Dann werden die Gleichungen (1), (2), …, (n_0), (n_0+1) des Systems (I), wo n_0 eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, ersichtlich identisch befriedigt durch jedes Wertsystem (p_n, $p_{n-1}, \ldots, p_{n-n_0+1}, p_{n-n_0}$), das den folgenden rekurrenten Beziehungen genügt:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} p_n = \beta \cdot p^{B+C} \\ p^A \cdot p_{n-1} = -\alpha^{-1} \cdot a_{m-1} \cdot p_n \\ p^A \cdot p_{n-2} = -\alpha^{-1} \cdot (a_{m-1} \cdot p_{n-1} + a_{m-2} \cdot p_n) \\ \vdots \\ p^A \cdot p_{n-n_0+1} = -\alpha^{-1} \cdot (a_{m-1} \cdot p_{n-n_0+2} + a_{m-2} \cdot p_{n-n_0+3} + \cdots \\ \qquad + a_{m-r+1} \cdot p_{n-n_0+r} + p_{n-n_0+r+1} + b_{m-r-1} \cdot p_{n-n_0+r+2} \\ \qquad + \cdots + b_1 \cdot p_{m+n-n_0} + b_0 \cdot p_{m+n-n_0+1}) \\ p^A \cdot p_{n-n_0} = -\alpha^{-1} \cdot (a_{m-1} \cdot p_{n-n_0+1} + a_{m-2} \cdot p_{n-n_0+2} + \cdots \\ \qquad + a_{m-r+1} \cdot p_{n-n_0+r-1} + p_{n-n_0+r} + b_{m-r-1} \cdot p_{n-n_0+r+1} \\ \qquad + \cdots + b_1 \cdot p_{m+n-n_0-1} + b_0 \cdot p_{m+n-n_0}). \end{cases}$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß, sobald man den vorläufig unbestimmten Zeichen β und C bestimmte Werte erteilt hat, diese Werte und die aus ihnen hervorgehenden Werte von $p_n, p_{n-1}, \ldots$ auch in allen nachfolgenden Gleichungen beibehalten werden.

Vor allem soll jetzt gezeigt werden, daß *man mit den in beliebig großer Anzahl* n_0 *aufstellbaren Beziehungen* (II) *schließlich zu einem Aus-*

druck $p^A \cdot p_{n-n_0}$ *gelangt, der (bei unbestimmt gelassenen* C*) höchstens durch die* $(A+C)$*-te Potenz des Primteilers* p *teilbar ist.* Zu diesem Zweck genügt es zweierlei nachzuweisen, nämlich *erstens*: es sind nicht alle auf p_n folgenden Lösungen $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots$ durch p_n teilbar; *zweitens*: ist eine gewisse Anzahl von etwa $\mu+1$ Lösungen $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-\mu}$ gefunden und ist $p_{n-\mu}$ durch keine der vorangehenden Lösungen $p_n, \ldots, p_{n-\mu+1}$ teilbar, so sind auch nicht alle auf $p_{n-\mu}$ folgenden Lösungen $p_{n-\mu-1}, p_{n-\mu-2}, \ldots$ durch $p_{n-\mu}$ teilbar. In der Tat: sind diese beiden Aussagen bewiesen, so gelangt man, da p_n durch die $(B+C)$-te, aber wegen $B+C<M$ nicht durch die $(B+C+1)$-te Potenz von p teilbar ist, schließlich sukzessiv zu einer Lösung p_{n-n_0}, die höchstens durch die C-te Potenz von p teilbar ist.

Der Nachweis jener beiden Behauptungen läßt sich so führen: Ist nicht schon unter den $r-1$ Lösungen $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_{n-r+1}$ eine, die nicht durch p_n teilbar ist, so gilt dies sicher von p_{n-r}; r bedeutet dabei die auf S. 138 unten eingeführte natürliche Zahl. Denn es ist

$$p^A \cdot p_{n-r} = -\alpha^{-1} \cdot (a_{m-1} \cdot p_{n-r+1} + a_{m-2} \cdot p_{n-r+2} + \cdots + a_{m-r+1} \cdot p_{n-1} + p_n);$$

da voraussetzungsgemäß (S. 138) $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_{m-r+1}$ sämtlich durch p, ferner nach der soeben gemachten Annahme $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_{n-r+1}$ sämtlich durch p_n teilbar sind, so ist der in der Klammer stehende Ausdruck seines letzten Gliedes wegen äquivalent p_n, d. h. p_{n-r} ist in diesem Fall wegen $A>0$ sicher nicht durch p_n teilbar. Zum Beweis der zweiten Behauptung werde angenommen, es seien die $\mu+1$ Lösungen $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-\mu}$ gefunden und die letzte unter ihnen $p_{n-\mu}$ sei durch keine der vorangehenden teilbar. Ist dann unter den $r-1$ Lösungen $p_{n-\mu-1}, p_{n-\mu-2}, \ldots, p_{n-\mu-r+1}$ eine, die nicht durch $p_{n-\mu}$ teilbar ist, so trifft die Behauptung zu. Sind dagegen jene $r-1$ Lösungen sämtlich durch $p_{n-\mu}$ teilbar, so ist $p_{n-\mu}$ keinesfalls in $p_{n-\mu-r}$ enthalten, wie die Beziehung aus (II)

$$\begin{aligned} p^A \cdot p_{n-\mu-r} = -\alpha^{-1} \cdot (&a_{m-1} \cdot p_{n-\mu-r+1} + a_{m-2} \cdot p_{n-\mu-r+2} + \cdots \\ &+ a_{m-r+1} \cdot p_{n-\mu-1} + p_{n-\mu} + b_{m-r-1} \cdot p_{n-\mu+1} + \cdots \\ &+ b_1 \cdot p_{m+n-\mu-r-1} + b_0 \cdot p_{m+n-\mu-r}) \end{aligned}$$

zeigt. Hier sind nämlich alle Summanden der Klammer mit Ausnahme von $p_{n-\mu}$ durch $p \cdot p_{n-\mu}$ teilbar; denn nach den soeben gemachten Annahmen sind zunächst $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-\mu+1}$ durch $p \cdot p_{n-\mu}$, ferner $p_{n-\mu-1}, p_{n-\mu-2}, \ldots, p_{n-\mu-r+1}$ wenigstens durch $p_{n-\mu}$ teilbar, und schließlich ist ja in den Koeffizienten $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_{m-r+1}$ sämtlich der Primteiler p ent-

halten (S. 138). Daher ist $p^A \cdot p_{n-\mu-r} \sim p_{n-\mu}$, also $p_{n-\mu-r}$ nicht durch $p_{n-\mu}$ teilbar, wie bewiesen werden sollte.

Nach dieser Vorbereitung ist es leicht, den Beweis des Fundamentalsatzes zu Ende zu führen. Zu diesem Zweck ist nur mehr der Nachweis erforderlich, daß bei geeigneter Verfügung über die vorläufig noch teilweise unbestimmten Größen β und C sich in $\mathfrak{R}$ stets Elemente $p_{n-1}, p_{n-2}, \cdots$ finden lassen, die sämtliche Beziehungen (II) befriedigen. Was die Anzahl dieser Beziehungen und damit der gesuchten Lösungen betrifft, so bestimmt sie sich durch die Forderung, daß die aus der letzten Gleichung (II) zu ermittelnde Lösung p_{n-n_0} ein *reguläres* Element von $\mathfrak{R}$ darstellen soll. Denn da alle Ausdrücke $p^A \cdot p_i$ ersichtlich ganze homogene lineare Funktionen von β sind, so kann man, sobald für eine natürliche Zahl n_0 — bei Wahl eines vorläufigen Wertes β_0 für β — sich für p_{n-n_0} der reguläre Wert γ ergibt, durch die Festsetzung $\beta = \beta_0 \gamma^{-1}$ bewirken, daß im besonderen $p_{n-n_0} = \varepsilon$ wird. Damit aber ist, wie auf S. 140 unten hervorgehoben, die gestellte Aufgabe völlig gelöst, da dann $n = n_0$ gesetzt werden kann und sämtliche Gleichungen (I) identisch befriedigt werden.

Um schließlich den zu Beginn des letzten Absatzes erwähnten Nachweis durchzuführen, bedenke man, daß offenbar alle Ausdrücke $p^A \cdot p_i$ — soweit sie existieren — auch ganze homogene lineare Funktionen von p^{B+C} sind, wo C eine noch unbestimmte ganze Zahl in den Grenzen $0 \leqq C < A$ sein sollte. Die natürliche Zahl n_0 werde nun eindeutig festgelegt durch die folgende Forderung: $p^A \cdot p_{n-n_0}$ *soll der erste unter den in* (II) *auftretenden Ausdrücken sein, der (bei unbestimmtem C) nicht durch* p^{A+C+1} *teilbar ist.* Ein solcher Ausdruck ist nach der auf S. 141/2 ausgesprochenen Behauptung stets vorhanden. Da bei dieser Festsetzung über n_0 die rechten Seiten aller Beziehungen (II) mit Ausnahme der letzten sämtlich durch p^{A+C+1} teilbar sind, so lassen sich die Lösungen $p_n, p_{n-1}, \cdots, p_{n-n_0+1}$ ohne weiteres, wenn auch im allgemeinen nicht eindeutig, als Funktionen von β und C derart bestimmen, daß sie — bei Beibehaltung des unbestimmten Charakters von β und C — die Beziehungen (II) identisch befriedigen und überdies sämtlich durch p^{C+1} teilbar sind. Es möge je ein beliebiger derartiger Wert für $p_n, p_{n-1}, \cdots, p_{n-n_0+1}$ fest gewählt werden.

Was die letzte der Beziehungen (II) betrifft, so ist nach der soeben über n_0 getroffenen Verfügung $p^A \cdot p_{n-n_0}$ höchstens durch die $(A + C)$-te

Potenz von p teilbar. Ist nun erstens $p^A \cdot p_{n-n_0} \sim p^{A+C}$, so werde die bisher unbestimmte ganze Zahl C gleich Null gesetzt. Ist dagegen $p^A \cdot p_{n-n_0} \sim p^{\bar{A}+C}$, wo $\bar{A} < A$, so ist die ganze Zahl $\bar{A}$ doch sicher positiv. Denn die in der rechten Seite der letzten Gleichung (II) vorkommende Klammer setzt sich aus Summanden zusammen, deren jeder eine der Lösungen $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-n_0+1}$ enthält; da letztere nach dem Schluß des vorigen Absatzes sämtlich mindestens durch die $(C+1)$-te Potenz von p teilbar sind, so gilt das nämliche umsomehr von $p^A \cdot p_{n-n_0}$. In diesem Fall werde $C = A - \bar{A}$ gesetzt, womit C auf den Bereich $0 < C < A$ beschränkt bleibt. In beiden Fällen ist nach der über C getroffenen Verfügung $p^A \cdot p_{n-n_0} \sim p^A$, also p_{n-n_0} als reguläres Element von $\mathfrak{R}$ bestimmbar. Durch passende Wahl von β kann also, wie auf S. 143 erwähnt, bewirkt werden, daß speziell $p_{n-n_0} = \varepsilon$ wird; setzt man dann $n = n_0$, so werden durch die gefundenen Werte $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ die sämtlichen Gleichungen (I) identisch befriedigt. Der Beweis des Fundamentalsatzes ist somit zum Abschluß gebracht.

II. Kapitel. Einfache Erweiterung eines zerlegbaren Ringes.

§ 1. Grundbegriffe der Theorie der Erweiterungen.

$\mathfrak{R}$ sei ein beliebiger zerlegbarer Ring, also ein Elementensystem mit Gleichheitsrelation und zwei unbeschränkt und eindeutig ausführbaren Operationen, das alle Bedingungen 1 — 6 sowie I und II des § 1 von Kap. I befriedigt. Ferner sei $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Elementensystem mit Gleichheitsrelation und zwei unbeschränkt und eindeutig ausführbaren Operationen, das alle Elemente von $\mathfrak{R}$ enthält und in dem die operative Verknüpfung der Elemente von $\mathfrak{R}$ die nämliche ist wie in $\mathfrak{R}$ selbst; sind dann auch in $\overline{\mathfrak{R}}$ wenigstens die Bedingungen 1 bis 6 — wenn auch nicht I und II — jenes Paragraphen allgemein erfüllt, so heiße $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Erweiterung des Ringes $\mathfrak{R}$, und zwar im besonderen eine eigentliche Erweiterung, falls $\overline{\mathfrak{R}}$ mindestens ein in $\mathfrak{R}$ nicht vorhandenes und den Elementen von $\mathfrak{R}$ ungleiches Element enthält. Werden in $\overline{\mathfrak{R}}$ auch die Endlichkeitsbedingung I und die Zerlegbarkeitsbedingung II befriedigt, so daß $\overline{\mathfrak{R}}$ einen zerlegbaren Ring darstellt, so werde $\overline{\mathfrak{R}}$ auch als ein Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

Genügt das Element α der Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ einer Identität in $\mathfrak{R}$ von der Form

$$a_0 \cdot \alpha^m + a_1 \cdot \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot \alpha + a_m = 0.$$

wo die a_i gewisse, *nicht sämtlich durch einen und denselben Primteiler von* $\mathfrak{R}$ *teilbare* Elemente von $\mathfrak{R}$ bedeuten, so heiße α ein (in bezug auf $\mathfrak{R}$) algebraisches Element von $\overline{\mathfrak{R}}$; gibt es keine derartige Identität in $\mathfrak{R}$, so werde α als ein (in bezug auf $\mathfrak{R}$) transzendentes Element von $\overline{\mathfrak{R}}$ bezeichnet. Eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$, deren Elemente sämtlich algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$ sind, heiße eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$, dagegen jede Erweiterung, die auch nur *ein* in bezug auf $\mathfrak{R}$ transzendentes Element enthält, eine transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}$.

Sind $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_2$ Erweiterungen des Ringes $\mathfrak{R}$, so sollen wie üblich*) $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_2$ äquivalente Erweiterungen von $\mathfrak{R}$ genannt werden, falls die Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_2$ einander isomorph in bezug auf Addition und Multiplikation derart zugeordnet werden können, daß jedes Element von $\mathfrak{R}$ sich selbst entspricht. Sollen die Erweiterungen eines Ringes bestimmt werden, die gegebenen Bedingungen genügen, so werde eine solche Aufgabe als im wesentlichen nur auf eine einzige Weise lösbar bezeichnet, falls alle Erweiterungen der gewünschten Art äquivalent sind.

Sind $\overline{\mathfrak{R}}_1$, $\overline{\mathfrak{R}}_2$, $\overline{\mathfrak{R}}_3$ verschiedene Erweiterungen des Ringes $\mathfrak{R}$, so werde $\overline{\mathfrak{R}}_2$ als zwischen $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_3$ liegend bezeichnet, wenn alle Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ in $\overline{\mathfrak{R}}_2$, alle Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}_2$ in $\overline{\mathfrak{R}}_3$ vorkommen und jeweils die operative Verknüpfung der nämlichen Elemente in der zweitgenannten Erweiterung die gleiche ist wie in der erstgenannten.

Ist $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ ein System von Elementen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ von der Art, daß keine Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zwischen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ alle Elemente des Systems $\mathfrak{S}$ enthält, so heiße $\overline{\mathfrak{R}}$ eine aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion des Systems $\mathfrak{S}$ hervorgehende Erweiterung; sie werde auch durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ bezeichnet. Enthält im besonderen die Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Element α von der Art, daß $\overline{\mathfrak{R}}$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion des einzigen Elementes α hervorgeht, so heiße $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\alpha)$ eine einfache**) Erweiterung von $\mathfrak{R}$. Im folgenden wird es sich fast ausschließlich um einfache Erweiterungen handeln.

---

*) Vgl. hierfür und für die weiteren Definitionen dieses Paragraphen die Darstellung bei Herrn *Steinitz* (a. a. O., S. 176 und 182).

**) Die hierdurch definierte Aussage, daß eine *Erweiterung* einfach ist (einfach in bezug auf die Gewinnung aus dem ursprünglichen Ring), ist scharf auseinanderzuhalten von der Aussage, daß ein *Ring* einfach ist (Def. 7 des § 1 von Kap. I auf S. 127).

§ 2. Einfache transzendente Erweiterung eines beliebigen zerlegbaren Ringes *).

$\mathfrak{R}$ bedeute wie im vorigen Paragraphen einen beliebigen zerlegbaren Ring mit n wesentlich verschiedenen Primteilern; $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ seien die n einfachen Ringe, in die sich der Ring $\mathfrak{R}$ gemäß Satz 6 des § 1 von Kap. I (S. 127) zerlegen läßt. Zu jedem dieser einfachen Ringe werde gemäß § 2 von Kap. I der Funktionenring $\mathfrak{R}_i(x)$ hergestellt. Man bilde endlich alle Elemente der Form

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x),$$

wo die „Komponente" $a_i(x)$ alle Elemente des einfachen Ringes $\mathfrak{R}_i(x)$ durchläuft. Werden zwei Summen dieser Art dann und nur dann als gleich erklärt, wenn ihre Komponenten in den n Ringen $\mathfrak{R}_i(x)$ paarweise gleich sind, und werden Addition und Multiplikation in üblicher Weise unter Berücksichtigung der in $\mathfrak{R}$ geltenden Beziehungen definiert, so stellt, wie leicht ersichtlich, die Gesamtheit aller Elemente $a(x)$ einen zerlegbaren Ring $\mathfrak{R}(x)$ mit n wesentlich verschiedenen Primteilern dar; diese Gesamtheit fällt offenbar zusammen mit dem System aller Ausdrücke der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$, wo $f(x)$ und $g(x)$ ganze rationale Funktionen von x mit beliebigen Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ bedeuten mit der einzigen Einschränkung, daß nicht sämtliche Koeffizienten von $g(x)$ durch einen und den nämlichen Primteiler von $\mathfrak{R}$ teilbar sein dürfen. Schließlich überzeugt man sich leicht, daß $\mathfrak{R}(x)$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion des transzendenten Elementes x hervorgeht und die einzige Erweiterung von $\mathfrak{R}$ mit dieser Eigenschaft ist. Es gilt also:

Satz 1: *Jeder zerlegbare Ring $\mathfrak{R}$ kann auf eine und auch nur auf eine Weise durch Adjunktion eines transzendenten Elements x erweitert werden. Die entstehende einfache transzendente Erweiternng $\mathfrak{R}(x)$ stellt selbst wieder einen zerlegbaren Ring dar, dessen Primteiler die Primteiler von $\mathfrak{R}$ und die ihnen in $\mathfrak{R}(x)$ äquivalenten Elemente sind.*

Die Definitionen der ganzen und gebrochenen Funktionen, der Zahlfunktionen und des Grades einer ganzen Funktion lassen sich offenbar von dem in Kap. I, § 2 betrachteten Funktionenring auf den hier eingeführten völlig übertragen. Als primitive Funktion von $\mathfrak{R}(x)$ wird jede Funktion zu betrachten sein, deren Zählerkoeffizienten nicht sämtlich durch denselben Primteiler von $\mathfrak{R}$ teilbar sind; dann ist auch

*) Die Kenntnis dieses Paragraphen ist für die beiden folgenden nicht nötig.

in $\mathfrak{R}(x)$ jede primitive Funktion regulär und umgekehrt. Als Verallgemeinerung der Zahlfunktionen wird man auch hier die ganzen primitiven Funktionen der Ordnung Null zu betrachten haben, d. h. diejenigen ganzen primitiven Funktionen, in denen sämtliche Koeffizienten mit Ausnahme des konstanten Gliedes durch jeden Primteiler von $\mathfrak{R}(x)$ teilbar sind.

In Einschränkung der entsprechenden für Körper bestehenden Tatsachen gilt der folgende

Satz 2: *Alle ganzen primitiven Funktionen der einfachen transzendenten Erweiterung $\mathfrak{R}(x)$ von $\mathfrak{R}$ sind in bezug auf $\mathfrak{R}$ transzendent, ausgenommen die Funktionen der Ordnung Null.*

Der Beweis dieses Satzes, der mittels der Zerlegung von $\mathfrak{R}(x)$ in n einfache Ringe gemäß Satz 6 von S. 127 geführt wird, ist einfach.

Von den im Satze 2 enthaltenen Beschränkungen sei einmal hervorgehoben, daß die Eigenschaft der Transzendenz sich nicht auch für die nichtprimitiven Funktionen, d. h. für die Nullteiler von $\mathfrak{R}(x)$, aussagen läßt; z. B. ist in einem einfachen Ring $\mathfrak{R}(x)$ schon eine gewisse Potenz einer jeden nichtprimitiven Funktion gleich Null. Ferner ist die merkwürdige Bemerkung zu machen, daß *der Transzendenzbeweis sich auch nicht auf die gebrochenen primitiven Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ ausdehnen läßt.* Dies liegt daran, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, eine gegebene gebrochene Funktion von $\mathfrak{R}(x)$ so darzustellen, daß Zähler und Nenner zueinander relativ prim sind (vgl. S. 136 Fußnote). Es sei beispielsweise $\mathfrak{R}$ ein sonst völlig beliebiger einfacher Ring, für dessen Primteiler p die Beziehung $p^2 = O$ gilt, und $\mathfrak{R}(x)$ die zugehörige, durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x entstehende Erweiterung; dann genügt die primitive Funktion $\alpha(x) = \dfrac{x}{x+p}$ aus $\mathfrak{R}(x)$ der folgenden Identität in $\mathfrak{R}(x)$:

$$\alpha^2 - 2\alpha + \varepsilon = O.$$

Zum Abschluß dieser Bemerkungen über transzendente Erweiterungen sei noch folgendes erwähnt: Da die einfache transzendente Erweiterung eines zerlegbaren Ringes wieder einen zerlegbaren Ring ergibt, so hat es keine Schwierigkeit, letzteren abermals durch Adjunktion eines in bezug auf ihn transzendenten Elementes zu erweitern usw. Man ge-

langt auf diese Weise ebenso wie bei Körpern zu denjenigen Erweiterungen eines zerlegbaren Ringes $\mathfrak{R}$, die durch Adjunktion endlich vieler Elemente entstehen, von denen jedes transzendent ist in bezug auf die durch Adjunktion aller vorangehenden Elemente entstandene Erweiterung. Diese Erweiterungen stellen selbst wiederum zerlegbare Ringe dar und besitzen analoge Eigenschaften wie die entsprechenden Erweiterungen von Körpern.

§ 3. Über die Kongruenz von Funktionen mit Koeffizienten aus einem einfachen Ring.

Zur Durchführung der einfachen algebraischen Erweiterung eines zerlegbaren Ringes ist es unerläßlich, den *Kongruenzbegriff* für Funktionen mit Koeffizienten aus einem zerlegbaren Ring einzuführen. Hierzu bedarf es vor allem der Einführung eines *engeren Teilbarkeitsbegriffs*. Es genügt dabei, die Betrachtung wie im vorigen Kapitel auf *einfache* Ringe zu beschränken, also wieder den in § 2 des vorigen Kapitels eingeführten Funktionenring $\mathfrak{R}(x)$ ins Auge zu fassen, dessen Primteiler p bis zum Exponenten M steigt, so daß $p^M = O$ ist.

Gemäß dem bisher verwendeten Teilbarkeitsbegriff (Def. 2 auf S. 124/5) ist eine Funktion $f(x)$ mit Koeffizienten aus dem einfachen Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann durch eine andere ebensolche $g(x)$ teilbar, wenn in $\mathfrak{R}(x)$ eine Funktion $h(x)$ vorhanden ist, die mit $g(x)$ multipliziert $f(x)$ ergibt. Hiernach ist eine Funktion vom Zahlenteiler p^m (S. 129) durch alle und nur die Funktionen von den Zahlenteilern p^μ teilbar, wo $0 \leqq \mu \leqq m$.

Gegenüber dieser allgemeinen Teilbarkeit algebraischer Natur werde eine engere Teilbarkeit von arithmetischer Art folgendermaßen erklärt:

Definition 1: Eine ganze Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ heiße durch eine andere ganze Funktion $g(x)$ **arithmetisch teilbar**, wenn es eine *ganze* Funktion $h(x)$ in $\mathfrak{R}$ gibt, für die $g(x) \cdot h(x) = f(x)$ ist. Eine ganze primitive Funktion in $\mathfrak{R}$ (S. 129) heiße irreduzibel in $\mathfrak{R}(x)$ oder schlechthin **irreduzibel**, wenn sie nur durch Funktionen ihrer eigenen Ordnung und der Ordnung Null arithmetisch teilbar ist; im anderen Fall heiße sie reduzibel in $\mathfrak{R}(x)$ oder einfach **reduzibel**.

Nach dieser Definition könnte es naheliegend erscheinen, zu versuchen, den Begriff des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Funktionen in der üblichen Weise einzuführen. Indes wäre im vorliegenden

Fall ein solcher größter gemeinsamer Teiler im allgemeinen gar nicht eindeutig bestimmt, da z. B. schon im Gleichungssystem (3) des § 3 von Kap. I (S. 137) die Funktion $h_\nu(x)$ nicht mehr eindeutig, sondern höchstens bis auf additiv hinzuzufügende Vielfache von p^{M-1} festgelegt ist; bei einer (konsequent nicht mehr möglichen) Weiterführung dieses Gleichungssystems würde sich die Unbestimmtheit entsprechend vermehren. *In $\mathfrak{R}(x)$ ist somit das Euklidische Teilverfahren nicht immer durchführbar und daher die Zerlegung einer ganzen primitiven Funktion in irreduzible Faktoren im allgemeinen nicht eindeutig.* Es steige beispielsweise der Primteiler p des sonst beliebigen einfachen Ringes $\mathfrak{R}$ bis zum Exponenten 2, sodaß $p^2 = O$; dann ist

$$x^2 + 2p \cdot x = x \cdot (x + 2p) = (x + p) \cdot (x + p),$$

während von den drei Funktionen $x + 2p$, $x + p$, x im allgemeinen keine durch eine andere arithmetisch teilbar ist.

Wohl zu unterscheiden von dieser Zerlegung der ganzen Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ in irreduzible ganze Faktoren ist natürlich die Zerlegung der Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ in Primteiler von $\mathfrak{R}(x)$, die offenbar bis auf äquivalente Funktionen eindeutig ist.

Im folgenden wird öfter der nachstehende unmittelbar einleuchtende Hilfssatz benutzt:

Hilfssatz: *Ist $f(x) = p^\mu \cdot f_0(x) \not\equiv O$, wo $f_0(x)$ eine ganze primitive Funktion der Ordnung m darstellt, und ist $f(x)$ durch eine ganze primitive Funktion $g(x)$ arithmetisch teilbar, so ist die Ordnung von $g(x)$ höchstens gleich m.*

Ist also insbesondere eine von Null verschiedene Zahlfunktion durch eine ganze primitive Funktion $f(x)$ arithmetisch teilbar, so ist $f(x)$ von der Ordnung Null.

Definition 2: Zwei ganze Funktionen in $\mathfrak{R}$ heißen kongruent für eine ganze Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ als Modul, wenn ihre Differenz durch $f(x)$ arithmetisch teilbar ist.

Es sei jetzt $f(x)$ *eine ein für allemal festgewählte ganze primitive Funktion* in $\mathfrak{R}$, die in Rücksicht auf die Anwendungen im nächsten Paragraphen sogleich als *irreduzibel* in $\mathfrak{R}(x)$ angenommen werden soll und *deren Ordnung m* zur Vermeidung von Trivialitäten als *positiv* vorausgesetzt werde. Dann wird durch die Gesamtheit aller ganzen Funktionen

in $\mathfrak{R}$ mit den Gradzahlen μ, wo $0 \leqq \mu < m$, einschließlich der Zahlfunktion O ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{R}(x)$ modulo $f(x)$ gebildet, d. h. ein System $\mathfrak{S}$ von Funktionen von der Art, daß jede beliebige ganze Funktion von $\mathfrak{R}(x)$ modulo $f(x)$ einer und nur einer Funktion von $\mathfrak{S}$ kongruent ist. In der Tat ergibt sich für eine beliebige ganze Funktion $g(x)$ in $\mathfrak{R}$, die nicht schon selbst zu $\mathfrak{S}$ gehört, bei Division durch $f(x)$ nach dem Korollar zum Fundamentalsatz (S. 136) in eindeutiger Weise

$$g(x) = f(x) \cdot \bar{f}(x) + g_0(x), \text{ also } g(x) \equiv g_0(x) \text{ (mod. } f(x)),$$

wo der Grad von $g_0(x)$ niedriger ist als die Ordnung m von $f(x)$. Sind ferner $g_1(x)$ und $g_2(x)$ zwei verschiedene Funktionen von niedrigeren Gradzahlen als m, so ist die Kongruenz $g_1(x) \equiv g_2(x)$ (mod. $f(x)$) ausgeschlossen, da auch die Differenz $g_1(x) - g_2(x)$ von niedrigerem Grad als m ist und daher, falls sie nicht identisch verschwindet, nach dem Hilfssatz (S. 149) nicht durch $f(x)$ arithmetisch teilbar sein kann.

Betrachtet man jetzt modulo $f(x)$ die ganzen Funktionen in $\mathfrak{R}$ oder, was nach dem Gesagten auf dasselbe hinauskommt, die Funktionen des vollständigen Restsystems $\mathfrak{S}$ in der Weise, daß man je zwei modulo $f(x)$ kongruente Funktionen und auch nur solche als *gleich* ansieht und im übrigen die in $\mathfrak{R}(x)$ definierten Operationen der Addition und Multiplikation beibehält, so erhält man ein neues System von Elementen mit einer Gleichheitsrelation und zwei unbeschränkt und eindeutig ausführbaren Operationen, für die ohne Verwechslungsgefahr die alten Bezeichnungen beibehalten werden können und sollen. Dieses neue System werde mit $\mathfrak{R}_f(x)$ bezeichnet. Offenbar werden in $\mathfrak{R}_f(x)$ die Bedingungen $1-5$ des § 1 von Kap. I (S. 123) allgemein befriedigt.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $\mathfrak{R}_f(x)$ *auch die Bedingung 6 jenes Paragraphen erfüllt*, die Bedingung der unbeschränkten Ausführbarkeit der Division durch (in $\mathfrak{R}_f(x)$) reguläre Elemente.

Vor allem enthält $\mathfrak{R}_f(x)$ sicher überhaupt reguläre Elemente, z. B. die regulären Zahlfunktionen. Es sei daher $\varrho(x)$ eine beliebige ganze Funktion, die in $\mathfrak{R}_f(x)$ den Charakter eines regulären Elements besitzt, d. h. zu der es in $\mathfrak{R}_f(x)$ keine Funktion $\varrho_0(x)$ gibt, für die in $\mathfrak{R}(x)$ die Kongruenz

$\varrho(x) \cdot \varrho_0(x) \equiv O$ (mod. $f(x)$) ohne die andere: $\varrho_0(x) \equiv O$ (mod. $f(x)$)

bestände. Es kommt dann nur darauf an, hieraus zu folgern, daß *die*

Funktionen $f(x)$ und $\varrho(x)$ in $\mathfrak{R}(x)$ relativ prim sind. In der Tat: ist dies der Fall, so besteht nach S. 137 (Gleichung (2)) in $\mathfrak{R}(x)$ eine Beziehung der Form

$$f(x) \cdot P(x) + \varrho(x) \cdot F(x) = \varepsilon \text{ oder } \varrho(x) \cdot F(x) \equiv \varepsilon \pmod{f(x)}.$$

Die Division durch das beliebig gegebene reguläre Element $\varrho(x)$ von $\mathfrak{R}_f(x)$ ist also in der Tat möglich, d. h. Bedingung 6 ist in $\mathfrak{R}_f(x)$ erfüllt.

Um nun zu zeigen, daß in dem einfachen Ring $\mathfrak{R}(x)$ die (ganzen primitiven) Funktionen $f(x)$ und $\varrho(x)$ zueinander relativ prim sind, wende man auf die beiden Funktionen in dieser Reihenfolge das Euklidische Teilverfahren an. Dieses läßt sich in der Form

$$\begin{aligned}
(1) \quad & f(x) = \varrho(x) \cdot \bar{\varrho}(x) + \varrho_1(x) \\
(2) \quad & \varrho(x) = \varrho_1(x) \cdot \bar{\varrho}_1(x) + \varrho_2(x) \\
& \vdots \\
(i+1) \quad & \varrho_{i-1}(x) = \varrho_i(x) \cdot \bar{\varrho}_i(x) + \varrho_{i+1}(x) \\
(i+2) \quad & \varrho_i(x) = \varrho_{i+1}(x) \cdot \bar{\varrho}_{i+1}(x) + \varrho_{i+2}(x) \\
& \vdots \\
(k) \quad & \varrho_{k-2}(x) = \varrho_{k-1}(x) \cdot \bar{\varrho}_{k-1}(x) + \varrho_k(x) \\
(k+1) \quad & \varrho_{k-1}(x) = \varrho_k(x) \cdot \bar{\varrho}_k(x) + \varrho_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

so lange in eindeutiger Weise durchführen, bis einmal eine durch p teilbare Restfunktion $\varrho_{k+1}(x)$ auftritt. Ist diese Funktion $\varrho_{k+1}(x) = O$, gilt also $\varrho_{k-1}(x) = \varrho_k(x) \cdot \bar{\varrho}_k(x)$, wo $\varrho_k(x)$ gleich allen vorangehenden Restfunktionen primitiv ist, so sind $f(x)$ und $\varrho(x)$ relativ prim; denn da die irreduzible Funktion $f(x)$ durch $\varrho_k(x)$ arithmetisch teilbar ist*), so besitzt $\varrho_k(x)$ die Ordnung Null, was nach der Definition von S. 136 das Kennzeichen jener Eigenschaft ist. Der gewünschte Nachweis wird also erbracht sein, wenn es gelingt zu zeigen, daß alle Restfunktionen $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots$ bis zur ersten verschwindenden $\varrho_{k+1}(x)$ sämtlich primitiv sind.

Dies ist mittels vollständiger Induktion unschwer einzusehen. Es werde nämlich die Beziehung $(i+1)$ betrachtet und folgendes vorausgesetzt: erstens sollen $\varrho_{i-1}(x)$ und $\varrho_i(x)$ primitive Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ darstellen;

---

*) Es ist übrigens nicht nötig, von der Irreduzibilität von $f(x)$ Gebrauch zu machen. Denn auch bei reduziblem $f(x)$ kann die Ordnung der Funktion $\varrho_k(x)$, durch die $f(x)$ und $\varrho(x)$ in $\mathfrak{R}(x)$ teilbar sind, nicht positiv sein, da sonst $\varrho(x)$ ein Nullteiler von $\mathfrak{R}_f(x)$ wäre.

zweitens soll der Grad der von Null verschiedenen Funktion $\varrho_{i+1}(x)$ kleiner sein als die Ordnung von $\varrho_i(x)$; drittens mögen die Funktionen $\varrho_{i+1}(x)$ und $\varrho_i(x)$ zueinander in der Beziehung stehen, daß aus jeder Kongruenz der Form

$$\varrho_i(x) \cdot \varrho_{i,0}(x) \equiv 0 \pmod{\varrho_{i-1}(x)}$$

die weitere Kongruenz folgt:

$$\varrho_{i,0}(x) \equiv 0 \pmod{\varrho_{i-1}(x)}.$$

Für $i = 0$ sind diese Voraussetzungen erfüllt, wenn (vgl. Beziehung (1) der vorigen Seite) $f(x)$ unter $\varrho_{-1}(x)$, $\varrho(x)$ unter $\varrho_0(x)$ verstanden wird; der primitive Charakter von $\varrho(x)$ wie auch die dritte der angeführten Eigenschaften (vgl. S. 150 unten) beruhen darauf, daß $\varrho(x)$ ein reguläres Element von $\mathfrak{R}_f(x)$ sein sollte. Aus diesen drei Voraussetzungen in bezug auf die Beziehung $(i+1)$ soll jetzt gefolgert werden, daß die entsprechenden Tatsachen auch für die Beziehung $(i+2)$ gelten, d. h. daß die Funktion $\varrho_{i+1}(x)$, falls sie nicht etwa verschwindet, gleichfalls primitiv ist und zu $\varrho_i(x)$ in solcher Beziehung steht, daß aus jeder Kongruenz der Form

$$\text{(I)} \qquad \varrho_{i+1}(x) \cdot \varrho_{i+1,0}(x) \equiv O \pmod{\varrho_i(x)}$$

die weitere folgt:

$$\text{(II)} \qquad \varrho_{i+1,0}(x) \equiv O \pmod{\varrho_i(x)}.$$

(Die zweite der oben ausgesprochenen Bedingungen ist infolge der Natur des Euklidischen Verfahrens von selbst erfüllt.)

Angenommen, $\varrho_{i+1}(x)$ wäre $\neq O$, aber nicht primitiv. Da dann wegen $(i+1)$ jedenfalls $\varrho_i(x)$ von positiver Ordnung wäre, so müßte $\bar{\varrho}_i(x)$ niedrigere Ordnung besitzen als $\varrho_{i-1}(x)$ und überdies ebenso wie $\varrho_{i-1}(x)$ primitiv sein. Ferner folgte aus $(i+1)$ durch Multiplikation mit p^{M-1}:

$$p^{M-1} \cdot \varrho_i(x) \cdot \bar{\varrho}_i(x) \equiv O \pmod{\varrho_{i-1}(x)}.$$

Hier könnte nun die von Null verschiedene ganze Funktion $p^{M-1} \cdot \bar{\varrho}_i(x)$ gemäß dem Hilfssatz von S. 149 nicht durch $\varrho_{i-1}(x)$ teilbar sein; daher würde die angeschriebene Kongruenz gegen die dritte der gemachten Voraussetzungen verstoßen. Der Widerspruch zeigt, daß die Funktion $\varrho_{i+1}(x)$ primitiv sein muß, falls sie nicht verschwindet.

Es bestehe ferner in $\mathfrak{R}(x)$ eine Kongruenz der Form (I); da wegen $(i+1)$ die Funktionen $\varrho_{i-1}(x)$ und $\varrho_{i+1}(x)$ einander modulo $\varrho_i(x)$ kongruent sind, so läßt sich für (I) auch schreiben:

$$\varrho_{i-1}(x) \cdot \varrho_{i+1,0}(x) \equiv O \pmod{\varrho_i(x)}$$

oder

$$\varrho_{i-1}(x) \cdot \varrho_{i+1,0}(x) + \varrho_i(x) \cdot \varrho_{i,0}(x) = O.$$

Nach der dritten der gemachten Voraussetzungen folgt aber hieraus:

$$\varrho_{i,0}(x) = \varrho_{i-1}(x) \cdot \bar{\varrho}_{i,0}(x), \text{ d. h. es ist}$$

$$\varrho_{i-1}(x)\,(\varrho_{i+1,0}(x) + \varrho_i(x) \cdot \bar{\varrho}_{i,0}(x)) = O.$$

Demnach verschwindet die Klammergröße, was nur einen anderen Ausdruck für die zu beweisende Kongruenz (II) darstellt.

Die drei in Frage stehenden Eigenschaften sind demnach, ebenso wie für die Beziehung (1), auch für alle folgenden Beziehungen so lange erfüllt, bis eine identisch verschwindende Restfunktion $\varrho_{k+1}(x)$ auftritt. Insbesondere sind daher *alle* Funktionen $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_k(x)$ primitiv. Der gewünschte Beweis der Tatsache, daß $f(x)$ und $\varrho(x)$ zu einander relativ prim sind, ist also zu Ende geführt und damit gezeigt, daß in $\mathfrak{R}_f(x)$ die Division durch reguläre Elemente unbeschränkt ausführbar ist.

Der Bereich $\mathfrak{R}_f(x)$ genügt demnach allen Bedingungen 1 — 6 des § 1; dagegen braucht die Zerlegbarkeitsbedingung II (und auch die Gradbedingung I) jenes Paragraphen (S. 125) in $\mathfrak{R}_f(x)$ nicht erfüllt zu sein. Dies möge hier durch ein Beispiel*) beleuchtet werden:

Der einfache Ring $\mathfrak{R}$ sei der Ring R_8 der Kongruenzklassen mod. 8; der zugehörige Funktionenring $R_8(x)$ sei gebildet und es werde $f(x) = x^2 + 3$ gewählt. Dann erfüllt der Bereich $R_{8_{x^2+3}}(x)$, der offenbar aus den 64 untereinander verschiedenen Elementen

$$a_1 \cdot x + a_2 \qquad \begin{pmatrix} a_1 = 0, 1, \ldots, 7 \\ a_2 = 0, 1, \ldots, 7 \end{pmatrix}$$

besteht, zwar die Bedingungen 1—6 (und I) des § 1 von Kap. I, aber nicht die Zerlegbarkeitsbedingung; denn es ist z. B. in $R_8(x)$

$$(x+1) \cdot (7x+1) \equiv 2 \cdot 2 \pmod{x^2+3},$$

obgleich $x+1$ in $R_{8_{x^2+3}}(x)$ auf keine Weise in ein Paar von Faktoren zerlegt werden kann, welche beide in jenem Ring Teiler von 2 wären.

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, daß die in $\mathfrak{R}(x)$ irreduzible Funktion $f(x)$ natürlich keineswegs den Charakter der Irreduzibilität in $\mathfrak{R}_f(x)$ beizubehalten braucht; z. B. ist in dem soeben als Beispiel verwendeten System $\mathfrak{R}_f(x)$ $(\mathfrak{R} = R_8,\ f(x) = x^2 + 3)$

*) Dieses Beispiel erweist gleichzeitig — einfacher als das zu diesem Zweck in R I, S. 151 benutzte Quaternionensystem — überhaupt die Existenz von Ringen, die *nicht* zerlegbar sind. Vgl. andererseits z. B. *W. Schmeidler*, Über homogene kommutative Gruppen hyperkomplexer Größen nsw. (Diss. Gött. 1917), z. B. S. 22, Fußn. 3).

$$x^2 + 3 = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) = O,$$

obgleich x^2+3 in $R_8(x)$ irreduzibel ist.

Endlich sei hervorgehoben, daß gemäß der Konstruktion von $\mathfrak{R}_f(x)$ dieser Bereich ersichtlich dann und nur dann lediglich die Elemente von $\mathfrak{R}$ und zu ihnen gleiche enthält, wenn $f(x)$ die Ordnung 1 besitzt.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen läßt sich schließlich in folgenden Satz zusammenfassen, aus dem auch der Wert des Begriffs relativ primer Funktionen (S. 136) deutlich erhellt:

Es sei $f(x)$ eine irreduzible, sonst aber beliebige ganze primitive Funktion positiver Ordnung in $\mathfrak{R}$ und es bezeichne $\mathfrak{R}_f(x)$ das System der ganzen Funktionen in $\mathfrak{R}$, in dem zwei Funktionen dann und nur dann als gleich angesehen werden, wenn sie in $\mathfrak{R}(x)$ modulo $f(x)$ kongruent sind, während im übrigen die Operationen der Addition und Multiplikation wie in $\mathfrak{R}(x)$ auszuführen sind; dann bildet $\mathfrak{R}_f(x)$ einen nichtzerlegbaren Ring, d. h. es sind in $\mathfrak{R}_f(x)$ zwar die Bedingungen 1—6, nicht aber notwendig die Bedingungen I und II des § 1 von Kap. I erfüllt. Alle ganzen primitiven Funktionen in $\mathfrak{R}$, die in $\mathfrak{R}(x)$ zu $f(x)$ relativ prim sind, sind reguläre Elemente von $\mathfrak{R}_f(x)$ und umgekehrt.

§ 4. Einfache algebraische Erweiterung eines einfachen Ringes.

$\mathfrak{R}(x)$ sei wie im vorigen Paragraphen der (einfache) Ring der rationalen Funktionen von x mit Koeffizienten aus dem einfachen Ring $\mathfrak{R}$; $f(x)$ bedeute eine ganze primitive Funktion positiver Ordnung in $\mathfrak{R}$, a ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Ist a eine Nullstelle von $f(x)$, so ist in $\mathfrak{R}(x)$ sicher $f(x)$ durch die Funktion $x-a$ arithmetisch teilbar. Denn dividiert man in $\mathfrak{R}(x)\, f(x)$ durch $x-a$, so erhält man

$$f(x) = (x-a) \cdot f_0(x) + a_0,$$

wo $f_0(x)$ eine ganze Funktion in $\mathfrak{R}$ und a_0 ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist; wäre $a_0 \neq O$, so hätte $f(a)$ den Wert a_0 gegen die Voraussetzung.

Es sei jetzt $f(x)$ eine ganze primitive *irreduzible* Funktion in $\mathfrak{R}$, deren *Ordnung mindestens gleich 2* sei; $f(x)$ besitzt dann in $\mathfrak{R}$ überhaupt keine Nullstelle. *Es soll die Aufgabe gelöst werden, eine einfache Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ zu bilden, die eine Nullstelle α der Funktion $f(x)$ enthält.*

Für die gegebene Funktion $f(x)$ bedeute wie im vorigen Paragraphen $\mathfrak{R}_f(x)$ das System der ganzen Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$, in dem

zwei Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ dann und nur dann als gleich betrachtet werden, wenn in $\mathfrak{R}(x)$ gilt:

$$g_1(x) \equiv g_2(x) \pmod{f(x)},$$

und in dem Addition und Multiplikation entsprechend definiert sind. Ordnet man dann jedem Element a von $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit aller in $\mathfrak{R}(x)$ modulo $f(x)$ zu a kongruenten — und darum in $\mathfrak{R}_f(x)$ unter einander gleichen — ganzen Funktionen aus $\mathfrak{R}(x)$ zu, so erhält man offenbar eine in bezug auf Addition und Multiplikation isomorphe Zuordnung π_0 zwischen $\mathfrak{R}$ und einem gewissen Teilbereich $\mathfrak{R}_f^{(0)}(x)$ von $\mathfrak{R}_f(x)$. $\mathfrak{R}_f^{(0)}(x)$ ist daher selbst ein Ring, der übrigens das Element x ersichtlich nicht enthält. Der Ring $\mathfrak{R}$ werde nun erweitert durch Aufnahme eines Systems $\mathfrak{S}$ neuer Elemente, die den nicht zu $\mathfrak{R}_f^{(0)}(x)$ gehörigen Elementen von $\mathfrak{R}_f(x)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet sein sollen; der Inbegriff dieser neuen Zuordnung und der Zuordnung π_0 sei mit π bezeichnet, während das durch Aufnahme der Elemente von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$ entstehende Elementensystem $\overline{\mathfrak{R}}$ heißen möge. Die Operationen der Addition und der Multiplikation in $\overline{\mathfrak{R}}$ mögen durch die folgende Forderung erklärt werden: die Zuordnung π, die für die Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_f^{(0)}(x)$ in bezug auf beide Operationen isomorph ist, soll *allgemein für sämtliche Elemente von* $\overline{\mathfrak{R}}$ *und* $\mathfrak{R}_f(x)$ isomorph sein. Auf Grund dieser Festsetzung werden beide Operationen in $\overline{\mathfrak{R}}$ ebenso wie in $\mathfrak{R}_f(x)$ unbeschränkt und eindeutig ausführbar sein und die Bedingungen 1 bis 6 des § 1 von Kap. I befriedigen. $\overline{\mathfrak{R}}$ stellt also nach der Definition von S. 144 eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$ dar*), und zwar eine *eigentliche* Erweiterung auf Grund der Voraussetzung, wonach die Ordnung m von $f(x)$ mindestens gleich 2 sein sollte; für $m = 1$ wären gemäß der Bemerkung von S. 154 oben $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{R}$ miteinander identisch.

Es sei jetzt α dasjenige Element von ($\mathfrak{S}$ und von) $\overline{\mathfrak{R}}$, das vermöge der Zuordnung π dem Element x aus $\mathfrak{R}_f(x)$ entspricht; ferner sei, falls $g(x)$ eine beliebige ganze Funktion aus $\mathfrak{R}(x)$ und also auch aus $\mathfrak{R}_f(x)$ darstellt, das vermöge π der Funktion $g(x)$ entsprechende Element von $\overline{\mathfrak{R}}$ mit $g(\alpha)$ bezeichnet. Dann ist wegen des Isomorphismus der Beziehung π offenbar $g(\alpha)$ gleichzeitig dasjenige Element von $\overline{\mathfrak{R}}$, das man erhält, wenn man in $g(x)$ die Unbestimmte x durch das Element α aus $\overline{\mathfrak{R}}$ er-

*) Vgl. die Darstellung bei Herrn *Steinitz*, a. a. O., S. 197.

setzt. In $\mathfrak{R}$ ist demnach: $f(\alpha) = O$. Die gestellte Aufgabe ist also mit der Konstruktion der Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ gelöst.

Da $f(x)$ primitiv sein sollte, so ist α nach der Definition von S. 144/5 ein in bezug auf $\mathfrak{R}$ algebraisches Element von $\overline{\mathfrak{R}}$. Um ferner zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{R}}$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion dieses algebraischen Elements α entsteht, ist nur nachzuweisen, daß zwischen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ keine Erweiterung von $\mathfrak{R}$ liegt, die das Element α enthält (S. 145). In der Tat führt schon die Forderung der unbeschränkten Ausführbarkeit von Addition und Multiplikation zu sämtlichen Elementen von $\overline{\mathfrak{R}}$, sobald man $\mathfrak{R}$ durch Aufnahme von α erweitert hat; denn besitzt $f(x)$ in $\mathfrak{R}(x)$ die Ordnung m, so läßt sich offenbar jedes Element β von $\overline{\mathfrak{R}}$ in der folgenden Form darstellen:

$$\beta = a_0 + a_1 \cdot \alpha + \cdots + a_{m-1} \cdot \alpha^{m-1},$$

wo die a_i Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind. Ist endlich $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ eine andere durch Adjunktion einer Nullstelle $\overline{\alpha}$ von $f(x)$ entstehende Erweiterung von $\mathfrak{R}$, so existiert zwischen $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ eine isomorphe Beziehung, bei der jedes Element von $\mathfrak{R}$ sich selbst und das Element α von $\overline{\mathfrak{R}}$ dem Element $\overline{\alpha}$ von $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ zugeordnet wird. Daher sind die Erweiterungen $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ von $\mathfrak{R}$ äquivalent (S. 145). Es gilt also:

Satz 1: *Ist $\mathfrak{R}$ ein einfacher Ring und $f(x)$ eine irreduzible ganze primitive Funktion*) positiver Ordnung in $\mathfrak{R}$, so gibt es eine — und abgesehen von äquivalenten Erweiterungen auch nur eine einzige — durch Adjunktion einer Nullstelle von $f(x)$ hervorgehende einfache Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\alpha)$ von $\mathfrak{R}$. Dann und nur dann ist $\overline{\mathfrak{R}}$ eine eigentliche Erweiterung von $\mathfrak{R}$, wenn die Ordnung von $f(x)$ mindestens gleich 2 ist.*

Die so entstehende Erweiterung $\mathfrak{R}(\alpha)$ von $\mathfrak{R}$ wird (vgl. S. 153) im allgemeinen nicht nur nicht einen einfachen Ring, sondern überhaupt keinen zerlegbaren Ring darstellen (vgl. dagegen den Satz 1 des § 2 auf S. 146). $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist nur ein System mit Gleichheitsrelation und zwei Operationen der Addition und Multiplikation, in dem die Bedingungen 1—6 des § 1 von Kap. I allgemein erfüllt sind, also ein „nichtzerlegbarer Ring". Die Sätze 3—6 des § 1 von Kap. I

---

*) Ist $f(x)$ reduzibel oder nicht primitiv, so gelangt man natürlich zu einer — wenn auch nicht eindeutig bestimmten — Erweiterung der gewünschten Art, indem man statt $f(x)$ eine irreduzible ganze primitive Funktion betrachtet, durch die $f(x)$ arithmetisch teilbar ist.

(S. 126f.), die wesentlich von der Zerlegbarkeitsbedingung II (S. 125) abhängen, werden daher im allgemeinen in $\mathfrak{R}(\alpha)$ nicht gültig sein. Falls $\mathfrak{R}(\alpha)$ nicht etwa unendlich viele wesentlich verschiedene Primteiler enthält, bleibt indessen in $\mathfrak{R}(\alpha)$ wenigstens der (vgl. R I, S. 149ff.) von der Zerlegbarkeitsbedingung unabhängige Satz 1 jenes Paragraphen bestehen, nach dem sich jeder Nullteiler von $\mathfrak{R}$ als Produkt von lauter Primteilern darstellen läßt. Während aber diese Darstellung in einem zerlegbaren Ring im wesentlichen eindeutig ist (R I, Satz 8 des § 2 auf S. 160), braucht dies in dem nichtzerlegbaren Ring $\mathfrak{R}(\alpha)$ nicht mehr der Fall zu sein.

Als Beispiel hierfür werde wieder (vgl. S. 153) von dem Ring $\mathfrak{R} = R_8$ ausgegangen, dem (einfachen) Ring der Kongruenzklassen modulo 8. In dem zugehörigen Ring $R_8(x)$ ist $f(x) = x^2 + 3$ offenbar eine irreduzible ganze primitive Funktion; durch Adjunktion einer Nullstelle α der Gleichung $x^2 + 3 = 0$, die auch durch $\alpha = \sqrt{5}$ bezeichnet werden kann, entsteht die Erweiterung $R_8(\sqrt{5})$, die die 64 verschiedenen Elemente

$$a_1 \cdot \sqrt{5} + a_2 \qquad \binom{a_1 = 0, 1, \ldots, 7}{a_2 = 0, 1, \ldots, 7}$$

enthält. Da diese Erweiterung nur endlich viele Elemente enthält, befriedigt sie um so mehr die Gradbedingung I von S. 125. Wie man sich leicht überzeugt, stellen die drei Elemente

$$1 + \sqrt{5}, \quad 1 + 7 \cdot \sqrt{5}, \quad 2$$

ein vollständiges System sämtlicher wesentlich verschiedenen Primteiler aus $R_8(\sqrt{5})$ dar. Obgleich also von diesen drei Elementen keines durch ein anderes in $R_8(\sqrt{5})$ teilbar ist, ist in diesem Bereich doch

$$(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 + 7 \cdot \sqrt{5}) = 2 \cdot 2;$$

in $R_8(\sqrt{5})$ ist also z. B. das Element 4 auf zwei wesentlich verschiedene Arten in Primteiler zerlegbar.

Es werde noch etwas näher auf die Struktur der nichtzerlegbaren Ringe eingegangen, die durch Adjunktion eines algebraischen Elements zu einem einfachen Ring entstehen. Es sei also wieder $\mathfrak{R}$ ein vorgelegter einfacher Ring, $\mathfrak{R}(x)$ der zugehörige Funktionenring, $f(x)$ eine irreduzible ganze primitive Funktion von einer Ordnung $\geqq 2$ in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}(\alpha)$ die durch Adjunktion einer Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$ entstehende einfache Erweiterung von $\mathfrak{R}$. Dann zerfällt das System aller ganzen primitiven Funktionen aus $\mathfrak{R}(x)$, ausgenommen die in $\mathfrak{R}(x)$ durch $f(x)$ arith-

metisch teilbaren Funktionen, in zwei Klassen: erstens in die Klasse der zu $f(x)$ relativ primen Funktionen (im Sinne des § 3 von Kap. I, S. 136 f.) und zweitens in die Klasse aller übrigen durch $f(x)$ nicht arithmetisch teilbaren ganzen primitiven Funktionen. Die Funktionen aller beiden Klassen sind offenbar zu $f(x)$ „teilerfremd"; da nämlich $f(x)$ irreduzibel ist, so gibt es keine ganze Funktion positiver Ordnung aus $\mathfrak{R}(x)$, durch die $f(x)$ und eine Funktion aus einer der beiden gekennzeichneten Klassen gleichzeitig arithmetisch teilbar wären. Trotzdem besteht zwischen den Funktionen beider Klassen ein sehr wesentlicher Unterschied in bezug auf ihr Verhalten zu $f(x)$ (vgl. das Schlußtheorem des § 3, S. 154).

Ist nämlich $g(x)$ eine Funktion der *ersten* Klasse, also relativ prim zu $f(x)$, so kann man nach § 3 des vorigen Kapitels (S. 136/7) zwei ganze Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ aus $\mathfrak{R}(x)$ finden, für die

$$f(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot F(x) = \varepsilon$$

wird. Geht man vom zerlegbaren Ring $\mathfrak{R}(x)$ zum nichtzerlegbaren Ring $\mathfrak{R}(\alpha)$ über, so verwandelt sich die letzte Beziehung in die folgende Gleichung in $\mathfrak{R}(\alpha)$:

$$g(\alpha) \cdot F(\alpha) = \varepsilon,$$

d. h. $g(\alpha)$ ist ein reguläres Element von $\mathfrak{R}(\alpha)$. Sind dagegen (*zweiter* Fall) die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ verwandt (S. 138), so gibt es sicher eine in $\mathfrak{R}(x)$ nicht durch $f(x)$ arithmetisch teilbare ganze Funktion $\bar{g}(x)$ derart, daß in $\mathfrak{R}(x)$ das Produkt $g(x) \cdot \bar{g}(x)$ durch $f(x)$ arithmetisch teilbar ist; denn wäre dies nicht der Fall, folgte also aus der Kongruenz in $\mathfrak{R}(x)$ $g(x) \cdot \bar{g}(x) \equiv O \,(\text{mod. } f(x))$ stets die andere $\bar{g}(x) \equiv O \,(\text{mod. } f(x))$, so wären ja nach dem auf S. 150ff. geführten Beweis $f(x)$ und $g(x)$ relativ prim im Widerspruch mit der Voraussetzung. Durch abermaligen Übergang von $\mathfrak{R}(x)$ zu $\mathfrak{R}(\alpha)$ erkennt man also, daß man, wenn $g(x)$ und $f(x)$ in $\mathfrak{R}(x)$ verwandt sind, zu dem Element $g(\alpha)$ aus $\mathfrak{R}(\alpha)$ ein von Null verschiedenes Element $\bar{g}(\alpha)$ aus $\mathfrak{R}(\alpha)$ finden kann, für das in $\mathfrak{R}(\alpha)$ gilt:

$$g(\alpha) \cdot \bar{g}(\alpha) = O;$$

$g(\alpha)$ ist also ein Nullteiler von $\mathfrak{R}(\alpha)$.

In einem beliebigen *Körper* von Funktionen einer Veränderlichen sind bekanntlich zwei ganze Funktionen relativ prim, wenn sie durch keine ganze Funktion positiven Grades des Körpers gleichzeitig teilbar sind. Im Gegensatz hierzu hat sich im Vorstehenden gezeigt, daß zwei ganze

primitive Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ des *Ringes* $\mathfrak{R}(x)$, die durch keine ganze Funktion positiver Ordnung des Ringes gleichzeitig arithmetisch teilbar sind, dennoch sehr wohl etwas Gemeinsames enthalten können, ähnlich wie in einem algebraischen Zahlkörper zwei nicht durch die nämliche algebraische Primzahl teilbare Zahlen trotzdem durch einen und denselben Primdivisor teilbar sein können. Ob $f(x)$ und $g(x)$ in einer solchen Gemeinsamkeitsbeziehung stehen, die erst beim Übergang zu einer durch $f(x)$ (oder durch $g(x)$) definierten einfachen algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ offenbar wird, oder aber ob $f(x)$ und $g(x)$ wirklich relativ prim sind, läßt sich durch das Euklidische Verfahren in $\mathfrak{R}(x)$ mühelos entscheiden.

Man erhält so den folgenden Satz, dessen zweite Hälfte genau entsprechend wie bei Körpern (*Steinitz*, a. a. O., S. 197 f.) bewiesen wird:

Satz 2: *Ist* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *eine wie in Satz 1 durch Adjunktion einer Nullstelle von* $f(x)$ *entstandene Erweiterung von* $\mathfrak{R}$ *und* $g(\alpha)$ *ein beliebiges nicht durch* p *teilbares Element von* $\mathfrak{R}(\alpha)$, *so ist* $g(\alpha)$ *ein reguläres Element oder ein Nullteiler von* $\mathfrak{R}(\alpha)$, *je nachdem in* $\mathfrak{R}(x)$ *die zugehörige ganze primitive Funktion* $g(x)$ *zu* $f(x)$ *relativ prim oder verwandt ist. Ebenso wie* α *ist auch jedes andere Element von* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *algebraisch in bezug auf* $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}(\alpha)$ *ist also eine einfache algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{R}$.

Alle bisherigen Ausführungen dieses Paragraphen verlieren ihren Sinn bzw. werden trivial, sobald die ganze primitive Funktion $f(x)$ von der Ordnung 0 ist; in diesem Fall sind ja alle Funktionen von $\mathfrak{R}(x)$ untereinander modulo $f(x)$ kongruent. Zu einer solchen Funktion $f(x)$ gibt es in der Tat keine Erweiterung von $\mathfrak{R}$, die eine Nullstelle von $f(x)$ enthielte. Denn $f(x)$ läßt sich in diesem Fall darstellen in der Form

$$f(x) = p \cdot f_0(x) + \eta,$$

wo $f_0(x)$ eine ganze Funktion aus $\mathfrak{R}(x)$, η eine reguläre *Zahlfunktion* ist; wie immer dann eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$ gewählt und aus ihr ein Wert für x eingesetzt werde, immer bleibt offenbar diese Summe aus einem durch p teilbaren und einem regulären Element von Null verschieden. *Eine ganze primitive Funktion der Ordnung Null ist daher nicht nur in* $\mathfrak{R}$ *selbst, sondern auch in jeder Erweiterung von* $\mathfrak{R}$ *stets ohne Nullstelle* (vgl. S. 134).

Es wurde bereits erwähnt, daß die einfache algebraische Erweiterung $\mathfrak{R}(\alpha)$ des einfachen Rings $\mathfrak{R}$ im allgemeinen nicht wieder einen zerlegbaren Ring darstellt; auf $\mathfrak{R}(\alpha)$ lassen sich daher die in der vorliegenden Arbeit

benutzten Sätze und Methoden in der Regel nicht mehr anwenden. Dagegen werde hier noch ein Satz über eine Klasse einfacher Ringe angefügt, deren einfache algebraische Erweiterungen von bestimmter Art zwar nicht einfache, wohl aber zerlegbare Ringe darstellen:

Satz 3: *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein einfacher Ring, dessen Primteiler nur bis zum Exponenten 2 steigt,* $f(x)$ *eine irreduzible ganze primitive Funktion in* $\mathfrak{R}$ *von der Ordnung 2 und* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *eine durch Adjunktion einer Nullstelle von* $f(x)$ *entstehende algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{R}$, *so stellt* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *einen (wenn auch nicht notwendig einfachen) zerlegbaren Ring dar, falls* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *nur endlich viele wesentlich verschiedene Nullteiler enthält.*

Insbesondere stellt daher eine einfache algebraische Erweiterung eines *Kongruenzklassenrings* R_p, für ein Primzahlquadrat p^2 als Modul stets dann wieder einen zerlegbaren Ring dar, wenn die definierende irreduzible Funktion die Ordnung 2 besitzt; denn jede solche Erweiterung enthält ja sogar nur endlich viele *verschiedene* Elemente.

Beweis: Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes 3 $f_1(\alpha)$ ein Primteiler*) von $\mathfrak{R}(\alpha)$; dann ist zunächst *das Element* p *von* $\mathfrak{R}(\alpha)$ — das den Charakter eines Primteilers, den es in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}(x)$ besitzt, in $\mathfrak{R}(\alpha)$ nicht beizubehalten braucht — *in* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *durch* $f_1(\alpha)$ *teilbar.* Sind nämlich *erstens* die Koeffizienten der dem Element $f_1(\alpha)$ entsprechenden ganzen Funktion $f_1(x)$ aus $\mathfrak{R}(x)$ sämtlich durch p teilbar, so folgt aus der vorausgesetzten *Primteiler*eigenschaft von $f_1(\alpha)$ sofort, daß $f_1(\alpha)$ und p in $\mathfrak{R}(\alpha)$ äquivalent sind, womit in diesem Fall die Behauptung bewiesen ist. Es sei also *zweitens* $f_1(x)$ primitiv; der Grad von $f_1(x)$ kann offenbar als $\leqq 1$ angenommen werden, da er sich anderenfalls mittels Division von $f_1(x)$ durch $f(x)$ unter zwei herabdrücken läßt. Ist die Ordnung von $f_1(x)$ gleich Null, so daß die regulären Zahlfunktionen durch die primitive Funktion $f_1(x)$ arithmetisch teilbar sind, so ist $f_1(\alpha)$ gewiß kein Nullteiler von $\mathfrak{R}(\alpha)$. Es können also Grad wie Ordnung von $f_1(x)$ als gleich 1 angenommen werden. Dividiert man nun in $\mathfrak{R}'(x)$ $f(x)$ durch $f_1(x)$, so ergibt sich

$$f(x) = f_1(x) \cdot \bar{f}_1(x) + c,$$

---

*) Die *Existenz* der Primteiler in $\mathfrak{R}(\alpha)$ folgt (vgl. S. 157 oben) aus dem Umstand, daß $\mathfrak{R}(\alpha)$ nur endlich viele wesentlich verschiedene Nullteiler enthält.

wo c eine Zahlfunktion ist. Hier kann c weder $= O$ sein, weil $f(x)$ nach Voraussetzung irreduzibel ist, noch auch regulär, weil dann $f_1(\alpha)$ ein reguläres Element von $\mathfrak{R}(\alpha)$ darstellen würde, wie der Übergang von der Gleichung zur Kongruenz modulo $f(x)$ lehrt; daher ist c ein dem Primteiler p äquivalentes Element von $\mathfrak{R}$. Der Übergang zur Kongruenz zeigt also endlich, daß in der Tat in $\mathfrak{R}(\alpha)$ p durch den Primteiler $f_1(\alpha)$ teilbar ist, wie gezeigt werden sollte.

Enthält $\mathfrak{R}(\alpha)$ keinen von $f_1(\alpha)$ wesentlich verschiedenen Primteiler, so wird die Zerlegbarkeitsbedingung II, deren Erfülltsein in $\mathfrak{R}(\alpha)$ nachgewiesen werden soll, in trivialer Weise befriedigt. Es werde daher angenommen, daß $\mathfrak{R}(\alpha)$ mindestens zwei wesentlich verschiedene Primteiler enthalte, und es seien $f_1(\alpha)$ und $f_2(\alpha)$ zwei beliebige wesentlich verschiedene dieser Primteiler; da dann nach dem letzten Absatz offenbar p nicht mehr Primteiler von $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist, kann gewiß weder $f_1(\alpha)$ noch $f_2(\alpha)$ durch p teilbar sein. Wendet man nun in $\mathfrak{R}(x)$ das Divisionsverfahren auf die diesen Primteilern entsprechenden ganzen primitiven Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ an, die wie im vorigen Absatz beide als von der Ordnung 1 und dem Grad 1 angenommen werden können, so folgt

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot \varphi(x) + c_0,$$

wo c_0 eine *reguläre* Zahlfunktion ist; denn durch Rückübergang zu $\mathfrak{R}(\alpha)$ folgt:

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) + c_0,$$

und wäre hier c_0 durch p, also nach dem im letzten Absatz bewiesenen Ergebnis auch durch den Primteiler $f_2(\alpha)$ in $\mathfrak{R}(\alpha)$ teilbar, so wäre ja gegen die Voraussetzung $f_2(\alpha)$ auch in $f_1(\alpha)$ enthalten.

Es sei nun $f_1(\alpha)^n$ eine (sonst beliebige) Potenz von $f_1(\alpha)$, die nicht durch $f_1(\alpha)^{n+1}$ teilbar ist; dann zeige ich, daß auch $f_1(\alpha)^n \cdot f_2(\alpha)$ nicht durch $f_1(\alpha)^{n+1}$ teilbar ist. Wäre dies nämlich der Fall, so würde ja das nämliche auch von dem folgenden Ausdruck gelten ($\varphi(\alpha)$ bedeutet das im letzten Absatz definierte Element von $\mathfrak{R}(\alpha)$):

$$f_1(\alpha)^{n+1} - f_1(\alpha)^n \cdot f_2(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) = f_1(\alpha)^n \cdot (f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)) = c_0 \cdot f_1(\alpha)^n;$$

dieser Ausdruck ist aber andererseits in $\mathfrak{R}(\alpha)$ äquivalent zu $f_1(\alpha)^n$. Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung bewiesen. Aus dieser letzten Aussage aber, in der ja die Primteiler $f_1(\alpha)$ und $f_2(\alpha)$ beliebig gewählt waren,

folgt nach einem in R I*) geführten Beweis, daß in der Tat in $\mathfrak{R}(\alpha)$ auch die Zerlegbarkeitsbedingung II allgemein erfüllt ist, daß also $\mathfrak{R}(\alpha)$ einen zerlegbaren Ring darstellt, wie gezeigt werden sollte.

§ 5. Einfache algebraische Erweiterung eines beliebigen zerlegbaren Ringes.

$\mathfrak{R}$ sei von nun an ein beliebiger zerlegbarer Ring mit n wesentlich verschiedenen Primteilern $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $\overline{P}_i$ sei der dem Primteiler p_i komplementäre normierte Orthogonalteiler (S. 126/7). Die einfache transzendente Erweiterung $\mathfrak{R}(x)$ von $\mathfrak{R}$ stellt nach Satz 1 des § 2 dieses Kapitels (S. 146) ebenfalls einen zerlegbaren Ring dar. Ist

$$F(x) = A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m$$

eine beliebige ganze, nicht identisch verschwindende Funktion aus $\mathfrak{R}(x)$, so soll $F(x)$ von der Ordnung n in bezug auf den Primteiler p_i heißen, falls die Funktion $\overline{P}_i \cdot F(x)$ in dem einfachen Ring aller durch $\overline{P}_i$ teilbaren Elemente von $\mathfrak{R}(x)$ (Satz 6, S. 127) die Ordnung n besitzt. Jeder ganzen primitiven Funktion von $\mathfrak{R}(x)$ kommt hiernach in bezug auf jeden der Primteiler p_i eine bestimmte Ordnung zu. Es ist leicht zu erkennen, *daß eine ganze primitive Funktion aus* $\mathfrak{R}(x)$, *die auch nur in bezug auf einen der Primteiler* p_i *die Ordnung Null besitzt, weder in* $\mathfrak{R}$ *noch in irgend einer Erweiterung von* $\mathfrak{R}$ *eine Nullstelle besitzen kann;* zu diesem Nachweis hat man nur den Gedankengang von S. 159 auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

Es sei daher *von nun an* $F(x)$ *eine ganze Funktion aus* $\mathfrak{R}(x)$, die nicht primitiv zu sein braucht, *für die aber keiner der Primteiler* p_i *im konstanten Glied* A_m *in niedrigerer Potenz enthalten ist als in sämtlichen anderen Koeffizienten* $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; von einer solchen Funktion $F(x)$ wird nach multiplikativer Absonderung eines Produkts von Primteilerpotenzen eine ganze primitive Funktion übrig bleiben, die in bezug auf jeden der Primteiler p_i positive Ordnung besitzt. *Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist der Nachweis, daß eine Erweiterung* $\overline{\mathfrak{R}}$ *von* $\mathfrak{R}$ *existiert,*

---

*) Die dort (S. 153) bewiesene Behauptung läßt sich so formulieren: Ist $\mathfrak{R}$ ein nicht notwendig zerlegbarer Ring mit endlich vielen wesentlich verschiedenen Nullteilern, und gilt für jeden Primteiler p aus $\mathfrak{R}$ die Tatsache, daß ein Produkt $a \cdot b$, dessen einer Faktor a genau durch die m-te Potenz von p teilbar ist, während b überhaupt p nicht enthält, selbst nicht durch p^{m+1} teilbar ist, so genügt $\mathfrak{R}$ der Zerlegbarkeitsbedingung.

die eine Nullstelle α von $F(x)$ enthält. Zu jedem der Primteiler p_i sei $p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \geqq 0)$ die höchste Potenz von p_i, die in *sämtlichen* Koeffizienten A_k enthalten ist; ist jede noch so hohe Potenz von p_i in sämtlichen A_k enthalten, so werde für α_i der Exponent genommen, bis zu dem p_i in $\mathfrak{R}$ steigt (Def. 5 auf S. 126). Dann läßt sich $F(x)$ offenbar (im allgemeinen freilich nicht eindeutig) darstellen in der Form

$$F(x) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \cdot f(x),$$

wo die ganze Funktion

$$f(x) = a_0 \cdot x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot x + a_m$$

primitiv gewählt werden kann und soll und in bezug auf jeden der Primteiler p_i positive Ordnung besitzt.

Es seien ferner $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ die n einfachen Ringe, in die sich $\mathfrak{R}$ im Sinne des Satzes 6 des § 1 von Kap. I (S. 127) zerlegen läßt, und $\mathfrak{R}_1(x), \mathfrak{R}_2(x), \ldots, \mathfrak{R}_n(x)$ die aus ihnen durch Adjunktion eines in bezug auf sie alle transzendenten Elementes x entstehenden Erweiterungen, die wiederum einfache Ringe darstellen (vgl. Satz 1 auf S. 146). Es kann sein, daß die ganze primitive Funktion $\bar{P}_i \cdot f(x)$ aus $\mathfrak{R}_i(x)$ (i beliebig), die in diesem einfachen Ring positive Ordnung besitzt, in ihm reduzibel ist. Jedenfalls aber ist $\bar{P}_i \cdot f(x)$ durch mindestens eine irreduzible ganze primitive Funktion positiver Ordnung aus $\mathfrak{R}_i(x)$ arithmetisch teilbar; eine beliebige solche sei mit $\bar{P}_i \cdot g_i(x)$ bezeichnet. Dann existiert nach den Sätzen 1 und 2 des vorigen Paragraphen eine und im wesentlichen nur eine durch Adjunktion einer Nullstelle α_i der Funktion $\bar{P}_i \cdot g_i(x)$ entstehende (eigentliche oder nicht eigentliche) algebraische Erweiterung $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ des einfachen Ringes $\mathfrak{R}_i$.

Obgleich nun die Systeme $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ im allgemeinen keine zerlegbaren Ringe und um so mehr keine einfachen Ringe darstellen, gelingt es doch, aus ihnen die gewünschte Erweiterung $\bar{\mathfrak{R}}$ in entsprechender Weise zusammenzusetzen, wie in dem (nur angedeuteten) Beweis des Satzes 1 on § 2 dieses Kapitels (S. 146) der Ring $\mathfrak{R}(x)$ aus den einfachen Ringen $\mathfrak{R}$ (x) zusammengesetzt wurde. Es werde nämlich ein Bereich $\bar{\mathfrak{R}}$ gebildet, der alle und nur die Elemente β der Form

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$$

enthalte, wo die „Komponente“ β_i ein beliebiges Element des nichtzer-

legbaren Ringes $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ bedeutet. Addition und Multiplikation in $\overline{\mathfrak{R}}$ seien unter Berücksichtigung der Operationsvorschriften in den nichtzerlegbaren Ringen $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ und in dem Ringe $\mathfrak{R}$ in üblicher Weise erklärt, sodaß also namentlich die Komponenten der Summe oder des Produkts durch Addition oder Multiplikation aus den entsprechenden Komponenten der Summanden oder der Faktoren zu bilden sind; da das Einheitselement von $\mathfrak{R}_i$ wie auch von $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ der zu p_i komplementäre normierte Orthogonalteiler $\overline{P}_i$ von $\mathfrak{R}$ (S. 126/7) ist, so verschwindet in $\overline{\mathfrak{R}}$ das Produkt jedes Elements aus $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ mit jedem Element aus $\mathfrak{R}_k(\alpha_k)$ für $i \neq k$ im Einklang mit der eben angegebenen Definition. Addition und Multiplikation sind demnach in $\overline{\mathfrak{R}}$ unbeschränkt und eindeutig ausführbare Operationen und befriedigen dabei offensichtlich die Bedingungen 1 — 5 des § 1 von Kap. I. Nullteiler von $\overline{\mathfrak{R}}$ sind alle und nur *die* Elemente $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, bei denen für mindestens einen speziellen Wert k das Element β_k durch einen Nullteiler von $\mathfrak{R}_k(\alpha_k)$ teilbar ist; das Einheitselement $\varepsilon = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \cdots + \overline{P}_n$ von $\mathfrak{R}$ ist gleichzeitig das Einheitselement von $\overline{\mathfrak{R}}$. Endlich ist auch die Bedingung 6 von der unbeschränkten und eindeutigen Division durch reguläre Elemente in $\overline{\mathfrak{R}}$ erfüllt; denn ist $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ ein reguläres Element von $\overline{\mathfrak{R}}$, also auch β_i für jeden Wert i in $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ regulär, und ist in $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ $\beta_i \cdot \beta_i^{-1} = \overline{P}_i$, so ist ja in $\overline{\mathfrak{R}}$

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \cdot (\beta_1^{-1} + \beta_2^{-1} + \cdots + \beta_n^{-1}) = \varepsilon.$$

Da ferner $\overline{\mathfrak{R}}$ alle Elemente von $\mathfrak{R}$ enthält, so ist $\overline{\mathfrak{R}}$ in der Tat eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$. Setzt man endlich in $f(x)$ an Stelle von x das Element

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

aus $\overline{\mathfrak{R}}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= a_0 \cdot \alpha^m + a_1 \cdot \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot \alpha + a_m \\
&= (a_0 \cdot \overline{P}_1 + a_0 \cdot \overline{P}_2 + \cdots + a_0 \cdot \overline{P}_n) \cdot (\alpha_1^m + \alpha_2^m + \cdots + \alpha_n^m) \\
&\quad + (a_1 \cdot \overline{P}_1 + a_1 \cdot \overline{P}_2 + \cdots + a_1 \cdot \overline{P}_n) \cdot (\alpha_1^{m-1} + \alpha_2^{m-1} + \cdots + \alpha_n^{m-1}) \\
&\quad + \cdots + (a_{m-1} \cdot \overline{P}_1 + a_{m-1} \cdot \overline{P}_2 + \cdots + a_{m-1} \cdot \overline{P}_n) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\
&\quad + (a_m \cdot \overline{P}_1 + a_m \cdot \overline{P}_2 + \cdots + a_m \cdot \overline{P}_n) \\
&= \sum_1^n{}_i (a_0 \cdot \overline{P}_i \cdot \alpha_i^m + a_1 \cdot \overline{P}_i \cdot \alpha_i^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot \overline{P}_i \cdot \alpha_i + a_m \cdot \overline{P}_i) \\
&= \overline{P}_1 \cdot f(\alpha_1) + \overline{P}_2 \cdot f(\alpha_2) + \cdots + \overline{P}_n \cdot f(\alpha_n).
\end{aligned}$$

Da nun α_i als Nullstelle von $\overline{P}_i \cdot g_i(x)$ definiert war, also $\overline{P}_i \cdot f(\alpha_i)$ in $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$

identisch verschwindet (S. 163), so ist auch $f(\alpha)$ und um so mehr $F(\alpha)$ in $\overline{\mathfrak{R}}$ gleich Null, d. h. die Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ enthält in der Tat eine Nullstelle α der vorgegebenen Funktion $F(x)$, wie bewiesen werden sollte.

Andererseits aber geht diese Erweiterung $\overline{\mathfrak{R}}$ aus dem Ringe $\mathfrak{R}$ durch *Adjunktion* des Elementes α hervor. In der Tat enthält eine etwa mögliche, durch Adjunktion von α entstehende Erweiterung $\mathfrak{R}(\alpha)$ des Ringes $\mathfrak{R}$ außer den Elementen von $\mathfrak{R}$ zunächst die Elemente $\overline{P}_i \cdot \alpha = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, daher auch alle Elemente der nichtzerlegbaren Ringe $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ und schließlich die sämtlichen, aus diesen durch Addition hervorgehenden Elemente von $\mathfrak{R}$. Ferner ist jedes Element β von $\overline{\mathfrak{R}}$ algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$; denn die Elemente $\beta \cdot \overline{P}_i$ der nichtzerlegbaren Ringe $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ genügen nach Satz 2 des vorigen Paragraphen (S. 159) in $\mathfrak{R}_i(\alpha_i)$ gewissen Identitäten $\varphi_i(\beta \cdot \overline{P}_i) = O$, wo $\varphi_i(x)$ eine ganze Funktion aus $\mathfrak{R}_i(x)$ bedeutet:

$$\varphi_i(x) = a_0^{(i)} \cdot x^m + a_1^{(i)} \cdot x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}^{(i)} \cdot x + a_m^{(i)} \text{*});$$

aus ihnen aber folgt durch Addition in $\overline{\mathfrak{R}}$:

$$O = \sum_1^n{}_i \varphi_i(\beta \cdot \overline{P}_i) = \sum_0^m{}_k \{a_k^{(1)} \cdot (\beta \cdot \overline{P}_1)^{m-k} + a_k^{(2)} \cdot (\beta \cdot \overline{P}_2)^{m-k} + \cdots + a_k^{(n)} \cdot (\beta \cdot \overline{P}_n)^{m-k}\}$$

$$= \sum_0^m{}_k (a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \cdots + a_k^{(n)}) \cdot ((\beta \cdot \overline{P}_1)^{m-k} + (\beta \cdot \overline{P}_2)^{m-k} + \cdots + (\beta \cdot \overline{P}_n)^{m-k})$$

$$= \sum_0^m{}_k (a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \cdots + a_k^{(n)}) \cdot \beta^{m-k},$$

d. h. β ist in der Tat algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$. Es gilt daher:

Satz 1: *Ist $\mathfrak{R}$ ein beliebiger zerlegbarer Ring und $F(x)$ eine ganze Funktion in $\mathfrak{R}$ von der Art, daß kein Primteiler von $\mathfrak{R}$ im konstanten Glied von $F(x)$ in niedrigerer Potenz enthalten ist als in sämtlichen übrigen Koeffizienten von $F(x)$, so gibt es mindestens eine***) *einfache algebraische Erweiterung $\mathfrak{R}(\alpha)$ von $\mathfrak{R}$, in der α Nullstelle von $F(x)$ ist.*

---

*) Unter m ist das Maximum der Gradzahlen der Funktionen $\varphi_i(x)$ in den Ringen $\mathfrak{R}_i(x)$ verstanden.

**) Die Aufgabe hat im allgemeinen mehrere wesentlich verschiedene Lösungen, weil ja selbst im Fall einer primitiven und in $\mathfrak{R}(x)$ irreduzibeln Funktion $F(x)$ sehr wohl eine der Funktionen $\overline{P}_i \cdot F(x)$ in $\mathfrak{R}_i(x)$ reduzibel sein kann.

Die Erweiterung $\mathfrak{R}(\alpha)$ wird natürlich, wie schon im Fall eines einfachen Ringes $\mathfrak{R}$, um so mehr in dem vorliegenden Fall in der Regel keinen zerlegbaren Ring darstellen. Dagegen kann der Satz 3 des vorigen Paragraphen auch auf den Fall eines beliebigen Ringes $\mathfrak{R}$ ausgedehnt werden. Die betreffende Überlegung, die ohne grundsätzliche Schwierigkeit durchzuführen ist, liefert das folgende Ergebnis:

Satz 2: *Ist $\mathfrak{R}$ ein beliebiger zerlegbarer Ring, von dessen Primteilern keiner bis zu einem höheren Exponenten als dem Exponenten 2 steigt, und bedeutet $F(x)$ eine ganze Funktion in $\mathfrak{R}$, aus der man durch eventuelle multiplikative Absonderung eines Produkts von Primteilerpotenzen eine ganze primitive Funktion $f(x)$ gewinnen kann, welche in bezug auf jeden Primteiler von $\mathfrak{R}$ je einc der Ordnungszahlen 1 und 2 besitzt, so ist jede durch Adjunktion einer Nullstelle von $f(x)$ und also auch von $F(x)$ entstehende Erweiterung von $\mathfrak{R}$, die nur endlich viele wesentlich verschiedene Primteiler enthält, selbst ein zerlegbarer Ring.*

Ist $\mathfrak{R}$ im besonderen ein Kongruenzklassenring für eine durch keinen Kubus teilbare natürliche Zahl als Modul, so enthält jede einfache algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$ überhaupt nur endlich viele verschiedene, also a fortiori nur endlich viele *wesentlich* verschiedene Elemente. Daher gilt folgendes Korollar zum letzten Satz, das sein Gegenstück findet in dem auf S. 157 behandelten Beispiel einer einfachen algebraischen, durch eine quadratische Gleichung definierten Erweiterung des Kongruenzklassenringes modulo 8, die *keinen* zerlegbaren Ring darstellt:

Korollar zu Satz 2: *Ist g eine beliebige, durch keinen Kubus teilbare natürliche Zahl, R_g der Kongruenzklassenring modulo g und $f(x)$ eine irreduzible quadratische Funktion in R_g, so existiert dann und nur dann mindestens eine durch Adjunktion einer Nullstelle von $f(x)$ entstehende algebraische Erweiterung von R_g, wenn das konstante Glied von $f(x)$ keine in g enthaltene Primzahl in niedrigerer Potenz enthält als jeder der beiden übrigen Koeffizienten von $f(x)$. Jede derartige Erweiterung des Ringes R_g stellt selbst einen zerlegbaren Ring dar.*

*Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen.

(Fortsetzung der Arbeit in Bd. 144, S. 167—189.)

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Die nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} + y = f(x,y), \tag{A}$$

wo $k > 0$ eine ganze positive Zahl und

$$f(x,y) = \Sigma A_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}\, y^{\mu} \qquad (\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda+\mu \geqq 2)$$

eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre Funktion von x, y darstellt, besitzt k ausgezeichnete partikuläre Lösungen η_m $(m = 0, 1, \ldots k-1)$, welche in der unter gleichem Titel in Bd. 144 erschienenen Arbeit durch *Laplace*sche Integrale ausgedrückt worden sind.

Die Funktion η_m, welche in dem Sektor $\mathfrak{S}_m$

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

durch die der Differentialgleichung (A) formal genügende (im allgemeinen divergente) Potenzreihe $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu x^\nu$*) asymptotisch dargestellt wird, kann durch konvergente Fakultätenreihen ausgedrückt werden.

---

*) Wenn wir wie in § 5 $A_{10} = A_{20} = \cdots = A_{k-1,0} = 0$ annehmen, ist $C_1 = C_2 = \cdots = C_{k-1} = 0$.

Während in jedem der k Sektoren

$$\frac{2m\pi - \frac{\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k} \qquad (m=0,1,\ldots k-1)$$

die Reihe S nur ein einziges Integral von (A) asymptotisch darstellt, bildet die Reihe S in jedem der k Sektoren $\mathfrak{S}^{(m)}$

$$\frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

oder in jedem der k Sektoren $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2}}{k}$$

die asymptotische Darstellung von unendlich vielen Integralen der Differentialgleichung (A)*). Unter Einführung eines Exponentialausdrucks

$$\xi = Ce^{\frac{1}{kx^k} - \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x}} x^{a_k}$$

mit der willkürlichen Konstanten C wird die Differentialgleichung (A) durch eine Potenzreihe

$$y = \Sigma C_{\nu n} x^\nu \xi^n \qquad (\nu, n=0,1,2,\ldots)$$

formal befriedigt, welche, wenn $C=0$ und damit $\xi=0$ ist, in die Reihe S übergeht. Die Gleichung (A) wird durch eine Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \varphi_n^{(m)}(x)$$

befriedigt, welche in dem Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ in hinreichender Nähe von $x=0$ konvergiert, und durch eine Reihe

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \bar{\varphi}_n^{(m)}(x),$$

welche im Sektor $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$ in der Nähe von $x=0$ konvergiert (§ 9). Die Funktionen $\varphi_0^{(m)}$ und $\bar{\varphi}_0^{(m)}$ stimmen mit η_m überein; die Funktion $\varphi_n^{(m)}$, welche im Sektor $\frac{2m\pi - \frac{\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$, und die Funktion $\bar{\varphi}_n^{(m)}$, welche im Sektor

---

*) Vgl. Bd. 119, S. 267 f.; Bd. 141, S. 182 f.

$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k}$ durch die Reihe $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\nu n} x^{\nu}$ asymptotisch dargestellt wird, lassen sich durch *Laplace*sche Integrale (§ 10 und § 11 für $k = 1$, § 12 und § 13 für $k > 1$) und durch konvergente Fakultätenreihen ausdrücken.

Die auf der *Laplace*schen Transformation beruhenden Methoden, welche zuerst nur auf lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten angewandt wurden, bleiben hiernach anwendbar, wenn die Differentialgleichungen nicht linear und die Koeffizienten nicht rational sind*). Die obigen Potenzreihen von x und ξ entsprechen den *Thomé*schen Normalreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Der vorliegende Aufsatz führt Untersuchungen, die ich schon im dritten Teil der Arbeit „Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle" im 119. Band dieses Journals begonnen habe, mit Benutzung *Laplace*scher Integrale und *Volterra*scher Integralgleichungen durch.

§ 9.

Das Integral η_m der Differentialgleichung (A) werde kurz mit η bezeichnet. Setzt man

$$y = \eta + z,$$

so besteht die Differentialgleichung

$$x^{k+1} \frac{dz}{dx} = \sum_{\mu=1}^{\infty} g_{\mu}(x)\, z^{\mu};$$

dabei sind

$$g_1(x) = \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} - 1, \quad g_{\mu}(x) = \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{\mu} f(x,\eta)}{\partial \eta^{\mu}} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots)$$

Funktionen von x, welche im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ durch Potenzreihen asymptotisch

---

*) Für lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten nicht rational sind, vgl. *H. Hamburger* „Über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen" (Diss. Un. München 1914) und die Arbeit des Verf. „Integration linearer Differentialgleichungen durch *Laplace*sche Integrale und Fakultätenreihen" (Jahresber. d. Math.-Ver. 24, 1915).

dargestellt werden; wenn man

$$a_1 = A_{11}, a_2 = A_{21}, \dots a_{k-1} = A_{k-1,1}, a_k = A_{k1} + 2\,A_{02}\,A_{k0}, \dots$$

setzt, ist

$$g_1(x) \sim -1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$$g_1(x) = -1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + x^{k+1} q(x),\ q(x) \sim a_{k+1} + a_{k+2} x + \cdots.$$

Die Differentialgleichung für z wird durch eine Reihe

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

befriedigt, die man erhält, indem man in der Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{k+1} \frac{dz_n}{dx} = \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu \Big(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\Big)^\mu$$

z_n durch $\alpha^n z_n$ ersetzt, wo α eine willkürliche Konstante ist, und die Koeffizienten von $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \alpha^n$ vergleicht; es ergeben sich die Gleichungen

$$x^{k+1} \frac{dz_1}{dx} = g_1 z_1,\ x^{k+1} \frac{dz_2}{dx} = g_1 z_2 + g_2 z_1^2,\ x^{k+1} \frac{dz_3}{dx} = g_1 z_3 + 2 g_2 z_1 z_2 + g_3 z_1^3,$$

. . . . . .

$$x^{k+1} \frac{dz_n}{dx} = g_1 z_n + H_n(z_1, \dots z_{n-1});$$

dabei ist H_n eine Summe von Produkten $g_l z_{\nu_1} \dots z_{\nu_l}$, wo l eine der Zahlen $2, \dots n$ ist und $\nu_1, \dots \nu_l$ Zahlen aus der Reihe $1, \dots n-1$ mit der Summe $\nu_1 + \cdots + \nu_l = n$.

Der Ausdruck

$$\xi = C e^{\frac{1}{k x^k} - \frac{a_1}{(k-1) x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x}} x^{a_k}$$

mit der willkürlichen Konstanten C genügt der Differentialgleichung

$$x^{k+1} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)\,\xi,$$

der Ausdruck

$$u = \xi\, e^{\int_0^x q(x)\,dx}$$

der Differentialgleichung

$$x^{k+1} \frac{du}{dx} = g_1 u;$$

im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ ist $\lim \xi = 0$ und $\lim u = 0$ für $\lim x = 0$. In diesem Sek-

tor werden die Differentialgleichungen für $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$ durch die folgenden Funktionen befriedigt:

$$z_1 = u,\ z_2 = u\int_0^x \frac{g_2 z_1^2}{x^{k+1}} u^{-1}\,dx,\ z_3 = u\int_0^x \frac{2 g_2 z_1 z_2 + g_3 z_1^3}{x^{k+1}} u^{-1}\,dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_n = u\int_0^x \frac{H_n(z_1, \dots z_{n-1})}{x^{k+1}} u^{-1}\,dx;$$

der Integrationsweg ist die im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ verlaufende Verbindungsgerade der Punkte 0 und x. Setzt man

$$z_n = u\,Z_n \qquad (n=1,2,\dots),$$

so ist

$$Z_1 = 1,\ Z_2 = \int_0^x \frac{g_2 Z_1^2}{x^{k+1}} u\,dx,\ Z_3 = \int_0^x \frac{2 g_2 Z_1 Z_2 + g_3 u Z_1^3}{x^{k+1}} u\,dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Z_n = \int_0^x \frac{F_n(Z_1, \dots Z_{n-1})}{x^{k+1}} u\,dx;$$

dabei ist F_n eine Summe von Produkten $g_l u^{l-2} Z_{\nu_1} \dots Z_{\nu_l}$ $(l = 2, \dots n;$ $\nu_1 + \dots + \nu_l = n)$.

Wir weisen nach, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ in dem im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ gelegenen Gebiet

$$|x| \leqq \mathfrak{r},\ \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert; dabei ist δ eine beliebig kleine und $\mathfrak{r}$ eine hinreichend kleine (von δ abhängige) positive Zahl.

Es sei $|x| = \varrho$, $\arg x = \vartheta$. Wir beschränken uns auf ein Gebiet

$$\varrho \leqq r,\ \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \vartheta \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}.$$

Es sind positive Größen R, $\mathfrak{g}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \dots)$ und $\mathfrak{q}$ so vorhanden, daß die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{g}_\mu R^\mu$ konvergiert und daß, wenn r hinreichend klein angenommen

wird, $|g_\mu(x)| \leqq \mathfrak{g}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ und $|q(x)| \leqq \mathfrak{q}$ ist. Die positive Konstante $\mathfrak{g}$ erfülle die Bedingung $\mathfrak{g} < \sin\delta$. Wir setzen

$$\mathfrak{u} = |C|\, e^{-\frac{a}{k\varrho^k}},$$

so daß

$$\varrho^{k+1}\frac{d\mathfrak{u}}{d\varrho} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{u}$$

ist. Der reelle Teil von $\frac{1}{kx^k}$ ist gleich

$$\frac{\cos k\vartheta}{k\varrho^k} \leqq -\frac{\sin\delta}{k\varrho^k};$$

der reelle Teil von

$$-\frac{a_1}{(k-1)\,x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x} + a_k \log x$$

ist höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der Glieder oder unter Vergrößerung des letzten absoluten Betrages höchstens gleich

$$\frac{|a_1|}{(k-1)\,\varrho^{k-1}} + \cdots + \frac{|a_{k-1}|}{\varrho} + |a_k|\left(|\log\varrho| + \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}\right);$$

der reelle Teil von $\int_0^x q(x)\,dx$ ist höchstens gleich $\mathfrak{q}\varrho$. Demnach ist

$$\frac{|u|}{\mathfrak{u}} \leqq e^{-\frac{\sin\delta-\mathfrak{g}}{k\varrho^k} + \frac{|a_1|}{(k-1)\varrho^{k-1}} + \cdots + \frac{|a_{k-1}|}{\varrho} + |a_k|\left(|\log\varrho| + \frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k}\right) + \mathfrak{q}\varrho},$$

und man kann r so klein nehmen, daß

$$|u| \leqq \mathfrak{u}$$

ist.

Die Differentialgleichung für z vergleichen wir mit der Differentialgleichung

$$\varrho^{k+1}\frac{d\mathfrak{z}}{d\varrho} = \mathfrak{g}\mathfrak{z} + \sum_{\mu=2}^{\infty}\mathfrak{g}_\mu\,\mathfrak{z}^\mu,$$

welche, wenn $\mathfrak{u}$ an Stelle von ϱ als unabhängige Veränderliche eingeführt und

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{u}\mathfrak{Z}$$

gesetzt wird, in

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{du} = \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{g_\mu}{g}\, u^{\mu-2}\, \mathfrak{Z}^\mu$$

übergeht. Die letztere Gleichung wird durch eine einzige Potenzreihe

$$\mathfrak{Z} = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots$$

mit dem Anfangsglied 1 und mit positiven Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ befriedigt, die für $u \leqq \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ hinreichend klein) konvergiert. Überträgt man die oben auf die Differentialgleichung für z angewandte Lösungsmethode auf die Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$, so erhält man die Reihe

$$\mathfrak{z} = u \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_n;$$

$$\mathfrak{Z}_1 = 1, \mathfrak{Z}_2 = \int_0^{\varrho} \frac{g_2\, \mathfrak{Z}_1^2}{\varrho^{k+1}}\, u\, d\varrho, \mathfrak{Z}_3 = \int_0^{\varrho} \frac{2 g_2\, \mathfrak{Z}_1\, \mathfrak{Z}_2 + g_3\, u\, \mathfrak{Z}_1^3}{\varrho^{k+1}}\, u\, d\varrho,$$

. . . . . .

$$\mathfrak{Z}_n = \int_0^{\varrho} \frac{\mathfrak{F}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1})}{\varrho^{k+1}}\, u\, d\varrho,$$

wo $\mathfrak{F}_n$ aus F_n dadurch hervorgeht, daß man $g_2, g_3, \ldots$ durch $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \ldots$ ersetzt. Unter der Annahme

$$\mathfrak{Z}_\nu = c_{\nu-1}\, u^{\nu-1},\ c_{\nu-1} \text{ konstant} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1),$$

die für $n = 2$ erfüllt ist, ist

$$\mathfrak{F}_n = \Sigma\, \mathfrak{g}_l\, u^{l-2}\, \mathfrak{Z}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{Z}_{\nu_l} = u^{n-1}\, \Sigma\, \mathfrak{g}_l\, c_{\nu_1-1} \ldots c_{\nu_l-1}$$
$$= (n-1)\, \mathfrak{g}\, c_{n-1}\, u^{n-1},\ c_{n-1} \text{ konstant},$$

$$\mathfrak{Z}_n = (n-1)\, \mathfrak{g}\, c_{n-1}\, u \int_0^{\varrho} \frac{u^{n-1}\, d\varrho}{\varrho^{k+1}} = (n-1)\, c_{n-1} \int_0^{u} u^{n-2}\, du = c_{n-1}\, u^{n-1}.$$

Die der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ genügende Reihe $u \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_n$ stimmt demnach mit einer für $u \leqq \mathfrak{R}$ konvergenten Potenzreihe von u überein; sie ist für $\varrho \leqq \mathfrak{r}$ gleichmäßig konvergent, wo $\mathfrak{r}$ die Bedingungen erfüllt:

$$\mathfrak{r} \leqq \sqrt[k]{\frac{\mathfrak{g}}{k \log \frac{|C|}{\mathfrak{R}}}} \text{ für } |C| > \mathfrak{R},\ \mathfrak{r} \leqq r.$$

In dem Gebiet

$$\varrho \leqq \mathfrak{r},\ \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \vartheta \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

ist

$$|Z_n| \leqq \mathfrak{Z}_n;$$

denn aus der Annahme $|Z_\nu| \leqq \mathfrak{Z}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n-1)$, die für $n = 2$ erfüllt ist, folgt wegen $|u| \leqq \mathfrak{u}$

$$|F_n(Z_1, \ldots Z_{n-1})| \leqq \mathfrak{F}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}),$$

und die Vergleichung der Formeln für Z_n und $\mathfrak{Z}_n$ ergibt $|Z_n| \leqq \mathfrak{Z}_n$. Daher ist die Reihe

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = u \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$$

in dem angegebenen Gebiet absolut und gleichmäßig konvergent.

Auch in dem Sektor $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$ ist $\lim \xi = 0$ und $\lim u = 0$ für $\lim x = 0$. Wenn die Funktionen $\bar{z}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durch dieselben Integralformeln definiert werden wie oben die Funktionen z_n, nur mit dem Unterschied, daß jetzt x sowie der geradlinige Integrationsweg $0 \ldots x$ dem Sektor $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$ angehört, so ist die Reihe

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n$$

absolut und gleichmäßig konvergent, wenn

$$|x| \leqq \bar{\mathfrak{r}}, \quad \frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2} - \delta}{k}$$

ist; dabei ist δ eine beliebig kleine und $\bar{\mathfrak{r}}$ eine hinreichend kleine positive Größe.

Um hervortreten zu lassen, daß z_n unter Zugrundlegung der Lösung $\eta = \eta_m$ im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ und $\bar{z}_n$ ebenfalls unter Zugrundlegung von $\eta = \eta_m$ im Sektor $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$ definiert ist, schreiben wir $z_n^{(m)}$ für z_n und $\bar{z}_n^{(m)}$ für $\bar{z}_n$. Obwohl der Sektor $\overline{\mathfrak{S}}^{(m)}$ mit dem Sektor $\mathfrak{S}^{(m-1)}$ übereinstimmt, braucht für $m \geqq 2$ die unter Zugrundlegung von $\eta = \eta_m$ gebildete Funktion $\bar{z}_n^{(m)}$ nicht mit der unter Zugrundlegung von $\eta = \eta_{m-1}$ gebildeten Funktion $z_n^{(m-1)}$ übereinzustimmen.

Setzt man

$$z_n = \xi^n \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so ist

$$(C^{(1)}) \quad \varphi_1 = e^{\int_0^x q(x)\,dx},$$

$$(C^{(2)}) \quad \varphi_2 = \xi^{-1} e^{\int_0^x q(x)\,dx} \int_0^x \frac{g_2 \varphi_1^2}{x^{k+1}} \xi e^{-\int_0^x q(x)dx}\, dx,$$

$$(C^{(3)}) \quad \varphi_3 = \xi^{-2}\, e^{\int_0^x q(x)\,dx} \int_0^x \frac{2\,g_2\,\varphi_1\,\varphi_2 + g_3\,\varphi_1^3}{x^{k+1}}\, \xi^2\, e^{-\int_0^x q(x)\,dx}\, dx,$$

. . . . . .

$$(C^{(n)}) \quad \varphi_n = \xi^{-(n-1)}\, e^{\int_0^x q(x)\,dx} \int_0^x \frac{H_n(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})}{x^{k+1}}\, \xi^{n-1}\, e^{-\int_0^x q(x)\,dx}\, dx;$$

x gehört dem Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ an, und als Integrationsweg dient die Gerade $0 \ldots x$. Wenn x im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ zur Grenze 0 geht, nähert sich φ_n einem endlichen Grenzwert. Denn es ist $\lim \varphi_1 = 1$, und unter der Voraussetzung, daß $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ endliche Grenzwerte haben, gilt dies auch für $H_n(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})$. Aus dem Hilfssatz 1 in Bd. 140, S. 134—135, dessen Beweis sich auf komplexe x übertragen läßt*), folgt, daß $\lim \varphi_n$ endlich ist.

Es bestehen die Differentialgleichungen

$$(D^{(1)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_1}{dx} + (-1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)\,\varphi_1 = g_1\,\varphi_1,$$

$$(D^{(2)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_2}{dx} + 2\,(-1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)\,\varphi_2 = g_1\,\varphi_2 + g_2\,\varphi_1^2,$$

$$(D^{(3)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_3}{dx} + 3\,(-1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)\,\varphi_3 = g_1\,\varphi_3 + 2\,g_2\,\varphi_1\,\varphi_2 + g_3\,\varphi_1^3,$$

. . . . . .

$$(D^{(n)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_n}{dx} + n\,(-1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)\,\varphi_n = g_1\,\varphi_n + H_n(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}).$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $(D^{(n)})$ unterscheidet sich von dem Integralausdruck $(C^{(n)})$ um den Ausdruck

$$\text{Const.}\ \xi^{-(n-1)}\, e^{\int_0^x q(x)\,dx},$$

welcher unendlich wird, wenn x im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ zur Null geht. Demnach stellt $(C^{(n)})$ die einzige Lösung der Differentialgleichung $(D^{(n)})$ dar, welche endlich bleibt, wenn sich x im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ der Grenze 0 nähert.

Um anzudeuten, daß die Funktion φ_n in dem Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ dargestellt ist, schreiben wir $\varphi_n = \varphi_n^{(m)}$. Die Differentialgleichung (A) wird, da

*) Vgl. Bd. 120, S. 6–9.

$y = \eta_m + z$ gesetzt war, durch die Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \varphi_n^{(m)}(x)$$

befriedigt, wo $\varphi_0^{(m)} = \eta_m$ ist. Diese Reihe ist in dem im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ gelegenen Gebiet

$$|x| \leqq \mathfrak{r}, \quad \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

absolut und gleichmäßig konvergent.

Wenn x und der Integrationsweg $0 \ldots x$ dem Sektor $\bar{\mathfrak{S}}^{(m)}$ angehören, stellen die Integralausdrücke (C) für φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Funktionen dar, die wir mit $\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi}_n^{(m)}$ bezeichnen. Wir haben die der Differentialgleichung (A) genügende Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \bar{\varphi}_n^{(m)}(x),$$

worin $\bar{\varphi}_0^{(m)} = \eta_m$ ist und welche in dem im Sektor $\bar{\mathfrak{S}}^{(m)}$ gelegenen Gebiet

$$|x| \leqq \bar{\mathfrak{r}}, \quad \frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2} - \delta}{k}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wenn die der Differentialgleichung (A) formal genügende Potenzreihe S ausnahmsweise konvergiert, ist $\eta_m = \eta_{m-1}$, also, da die Sektoren $\mathfrak{S}^{(m)}$ und $\mathfrak{S}^{(m-1)}$ übereinstimmen, $\bar{z}_n^{(m)} = z_n^{(m-1)}$ oder $\bar{\varphi}_n^{(m)} = \varphi_n^{(m-1)}$. Dies gilt besonders dann, wenn $f(x, 0) \equiv 0$, also $\eta \equiv 0$ ist, d. h. in dem in Bd. 119, S. 281 f. in Angriff genommenen Fall.

Die Funktionen g_μ gehen, wenn man für η die im allgemeinen divergente Potenzreihe S setzt, in Potenzreihen von x über. Die Differentialgleichung $(D^{(1)})$ wird durch eine für φ_1 eingesetzte Potenzreihe

$$S_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu 1} x^\nu$$

formal befriedigt; dabei ist C_{01} eine willkürliche Konstante, welche wir gleich 1 annehmen. Setzt man, so fortfahrend, für $H_n(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})$ die Potenzreihe $H_n(S_1, \ldots S_{n-1})$, so wird die Differentialgleichung $(D^{(n)})$ durch eine Potenzreihe

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu$$

formal befriedigt.

Als formale Lösung der Differentialgleichung (A) erscheint eine Potenzreihe von x und ξ

$$y = \Sigma C_{\nu n} x^{\nu} \xi^{n} \qquad (\nu, n = 0, 1, 2, \ldots);$$

dabei ist $C_{\nu 0} = C$, und zwar ist unter der in § 5 gemachten Annahme $C_0 = C_1 = \cdots = C_{k-1} = 0$.

Wir heben den folgenden Satz hervor:

Die Differentialgleichung (A), *welche im Sektor* $\mathfrak{S}_m$ *die ausgezeichnete partikuläre Lösung* η_m $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ *hat, wird durch die Reihen*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \varphi_n^{(m)}(x) \text{ und } y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \bar{\varphi}_n^{(m)}(x) \qquad (m = 0, 1, \ldots k-1)$$

befriedigt, von denen die erste im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$, *die zweite im Sektor* $\bar{\mathfrak{S}}^{(m)}$ *in hinreichender Nähe von* $x = 0$ *konvergiert. Dabei ist*

$$\xi = C e^{\frac{1}{k x^k} - \frac{a_1}{(k-1) x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x}} x^{a_k},$$

$$a_1 = A_{11}, a_2 = A_{21}, \ldots a_{k-1} = A_{k-1,1}, \; a_k = A_{k1} + 2 A_{02} A_{k0}$$

und C *eine willkürliche Konstante. Während* $\varphi_0^{(m)} = \bar{\varphi}_0^{(m)} = \eta_m$ *ist, sind* $\varphi_n^{(m)}$ *und* $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen* $(D^{(n)})$.

§ 10.

Die weitere Untersuchung der in § 9 nachgewiesenen Lösungen soll zunächst im Fall $k = 1$, d. h. für die Differentialgleichung

$$(A_1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + y = f(x, y)$$

durchgeführt werden.

Die ausgezeichnete partikuläre Lösung η wird für $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ durch die Reihe S asymptotisch dargestellt. Setzt man

$$a = a_1 = A_{11} + 2 A_{02} A_{10},$$

so ist

$$\xi = C e^{\frac{1}{x}} x^a.$$

Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ genügen den Differentialgleichungen

$$(D_1^{(1)}) \quad x^2 \frac{d\varphi_1}{dx} + (-1 + ax)\,\varphi_1 = g_1\,\varphi_1,$$

$$(D_1^{(2)}) \quad x^2 \frac{d\varphi_2}{dx} + 2\,(-1 + ax)\,\varphi_2 = g_1\,\varphi_2 + g_2\,\varphi_1^2,$$

. . . . . .

$$(D_1^{(n)}) \quad x^2 \frac{d\varphi_n}{dx} + n\,(-1 + ax)\,\varphi_n = g_1\,\varphi_n + H_n(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}).$$

Die Funktion η wurde in §§ 1—4 als *Laplace*sches Integral

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

dargestellt; $w(t)$ genügt der Integralgleichung (B_1) und hat die in § 4 angegebenen Eigenschaften; als Integrationsweg dient die Gerade $\arg t = \omega$ $(-\pi + \theta \leqq \omega \leqq \pi - \theta)$; das *Laplace*sche Integral ist in einem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$ konvergent. Die Größe σ, wie sie in § 3 eingeführt wurde, hängt von θ ab.

Um auch die Funktionen φ_n als *Laplace*sche Integrale darstellen zu können, bringen wir zunächst

$$g_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x,\eta)}{\partial \eta^n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda n}\, x^\lambda + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu}\, x^\lambda\, \eta^{\mu-n}$$

auf die Form eines *Laplace*schen Integrals mit dem bisherigen Integrationsweg. Für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$, wo $\sigma \geqq h$ (vgl. § 2) angenommen werden kann, ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu}\, x^\lambda = \int_0^\infty G_\mu(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,\ \eta^{\mu-n} = \int_0^\infty w^{\mu-n}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt \qquad (\mu > n),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu}\, x^\lambda \cdot \eta^{\mu-n} = \int_0^\infty G_\mu\, w^{\mu-n}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

Demnach ist

$$g_n = A_{0n} + \int_0^\infty G_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} A_{0\mu} \int_0^\infty w^{\mu-n}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

$$+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_0^\infty G_\mu\, w^{\mu-n}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

oder, wenn man

$$Q_n(t) = G_n(t) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} A_{0\mu}\, w^{\mu-n}(t) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} G_\mu\, w^{\mu-n}(t)$$

setzt,

$$g_n = A_{0n} + \int_0^\infty Q_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

vorausgesetzt, daß x in dem in § 11 bestimmten Konvergenzgebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\sigma}$ des *Laplace*schen Integrals liegt. Ersetzt man A_{01} durch -1, so hat man

$$g_1 = -1 + \int_0^\infty Q_1(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

Wegen $w(0) = C_1 = A_{10}$, $G_1(0) = A_{11}$ ist

$$Q_1(0) = A_{11} + 2\, A_{02}\, A_{10} = a.$$

Wir suchen eine Funktion $w_n(t)$ so zu bestimmen, daß

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^\infty w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt^*) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

wird. Wenn man

$$\varphi_n = C_{0n} + \psi_n \quad (n=1,2,\ldots), \qquad g_1 = -1 + h_1,\ g_n = A_{0n} + h_n \quad (n=2,3,\ldots)$$

setzt, gelten die Differentialgleichungen

$$x^2 \frac{d\psi_1}{dx} = (h_1 - ax)\,\psi_1 + h_1 - ax,$$

$$x^2 \frac{d\psi_2}{dx} - \psi_2 = (h_1 - 2ax)\,\psi_2 + C_{02}(h_1 - 2ax) + h_2 + 2A_{02}\,\psi_1 + 2h_2\,\psi_1 + A_{02}\,\psi_1^2 + h_2\,\psi_1^2,$$

. . . . . .

$$x^2 \frac{d\psi_n}{dx} - (n-1)\,\psi_n = (h_1 - nax)\,\psi_n + C_{0n}(h_1 - nax) + \cdots.$$

Nun ist

$$h_n = \int_0^\infty Q_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,\ \psi_n = \int_0^\infty w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

$$x^2 \frac{d\psi_n}{dx} = \int_0^\infty t w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,\ x\psi_n = \int_0^\infty \int_0^t w_n(\tau)\, d\tau \cdot e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

$$h_1\,\psi_n = \int_0^\infty Q_1\, w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,\ h_2\,\psi_1^2 = \int_0^\infty Q_2\, w_1^2(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

usw. Die Differentialgleichungen für $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ werden erfüllt, wenn $w_1(t)$, $w_2(t), \ldots w_n(t)$ den folgenden Integralgleichungen genügen:

---

*) Es ist $C_{01} = 1$ angenommen.

$$(E_1^{(1)}) \quad t\,w_1(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - a)\, w_1(\tau)\, d\tau + Q_1(t) - a,$$

$$(E_1^{(2)}) \quad (t-1)\, w_2(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - 2a)\, w_2(\tau)\, d\tau + C_{02}(Q_1(t) - 2a)$$
$$+ Q_2(t) + 2A_{02}\, w_1(t) + 2Q_2\, w_1(t) + A_{02}\, w_1^2(t) + Q_2\, w_1^2(t),$$

. . . . . .

$$(E_1^{(n)}) \quad (t-n+1)\, w_n(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - na)\, w_n(\tau)\, d\tau + C_{0n}(Q_1(t) - na) + \ldots;$$

in der letzten Gleichung hängen die nicht angeschriebenen Glieder von $Q_2(t), \ldots Q_n(t)$ und $w_1(t), \ldots w_{n-1}(t)$ ab.

Die Differentialgleichung für ψ_n wird durch die Reihe

$$\psi_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu n}\, x^\nu$$

formal befriedigt; wie in § 2 sieht man, daß die Integralgleichung $(E_1^{(n)})$ durch die Reihe

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu n}\, \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

befriedigt wird.

Die Integralgleichung $(E_1^{(1)})$ lösen wir durch sukzessive Annäherung, indem wir setzen:

$$t\,w_1^{(0)}(t) = Q_1(t) - a, \quad t\,w_1^{(\nu)}(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - a)\, w_1^{(\nu-1)}(\tau)\, d\tau \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Zunächst ist $\frac{Q_1(t)-a}{t} = w_1^{(0)}(t)$ im Kreis $|t| \leqq 1-\varepsilon$ und im Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ regulär. Ferner ist $\frac{w_1^{(\nu)}(t)}{t^\nu}$ im angegebenen Gebiet regulär, wie man durch den Schluß von $\nu - 1$ auf ν erkennt. Für $|t| \leqq 1-\varepsilon$ und für $|\arg t| \leqq \pi - \theta$, $|t| \leqq r$ (r beliebig groß) sei

$$\left|\frac{Q_1(t)-a}{t}\right| \leqq M.$$

Dann ist

$$|w_1^{(0)}(t)| \leqq M.$$

Aus

$$|w_1^{(\nu-1)}(t)| \leqq \frac{M^\nu\, |t|^{\nu-1}}{\nu\, ((\nu-1)!)^2}$$

folgt

$$|t| \cdot |w_1^{(\nu)}(t)| \leqq \int_0^{|t|} M(|t| - |\tau|) \frac{M^\nu |\tau|^{\nu-1}}{\nu((\nu-1)!)^2} d|\tau| = \frac{M^{\nu+1}}{\nu((\nu-1)!)^2} \frac{|t|^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)},$$

$$|w_1^{(\nu)}(t)| \leqq \frac{M^{\nu+1}|t|^\nu}{(\nu+1)(\nu!)^2}.$$

Die Reihe

$$w_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_1^{(\nu)}(t)$$

ist für $|t| \leqq 1-\varepsilon$ und für $|\arg t| \leqq \pi - \theta$, $|t| \leqq r$ absolut und gleichmäßig konvergent und genügt der Integralgleichung $(E_1^{(1)})$. Sie stellt eine im Kreis $|t| \leqq 1-\varepsilon$ und im Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ reguläre Funktion dar.

Die Anwendung der Methode sukzessiver Annäherung auf die Integralgleichung $(E_1^{(2)})$, bei der die neue Singularität $t=1$ hinzutritt, ergibt, daß $w_2(t)$ im Kreis $|t| \leqq 1-\varepsilon$ und in den beiden Sektoren $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ und $\pi + \theta \leqq \arg t \leqq 2\pi - \theta$ regulär ist. Dasselbe gilt für $w_n(t)$ $(n > 2)$, da die neu hinzukommenden Singularitäten $t = 2, 3, \ldots$ auf der bereits ausgeschlossenen Geraden $\arg t = 0$ liegen. Die der Integralgleichung $(E_1^{(n)})$ genügende Potenzreihe

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ist demnach für $|t| < 1$ konvergent.

§ 11.

Wir benutzen den Hilfsatz:

In einem Sektor $\theta_1 \leqq \arg t \leqq \theta_2$, in welchem $u(t)$, $v(t)$ reguläre Funktionen sind (abgesehen von $t=\infty$) und

$$|u(t)| < K e^{\sigma|t|}, \quad |v(t)| < \tilde{K} e^{\tilde{\sigma}|t|}$$

ist, ist unter der Voraussetzung $\tilde{\sigma} > \sigma > 0$

$$|uv(t)| < \frac{K\tilde{K}}{\tilde{\sigma}-\sigma} e^{\tilde{\sigma}|t|}.$$

Es ist nämlich

$$|uv(t)| = \left| \int_0^t u(t-\tau) v(\tau) d\tau \right| < \int_0^{|t|} K e^{\sigma(|t|-|\tau|)} \cdot \tilde{K} e^{\tilde{\sigma}|\tau|} d|\tau|$$

$$= K\tilde{K} e^{\sigma|t|} \int_0^{|t|} e^{(\tilde{\sigma}-\sigma)|\tau|} d|\tau| < K\tilde{K} e^{\sigma|t|} \cdot \frac{e^{(\tilde{\sigma}-\sigma)|t|}}{\tilde{\sigma}-\sigma} = \frac{K\tilde{K}}{\tilde{\sigma}-\sigma} e^{\tilde{\sigma}|t|}.$$

Ferner ist

$$|u^2(t)| < \frac{K^2}{\tilde{\sigma}-\sigma} e^{\tilde{\sigma}|t|},$$

wenn $\tilde{\sigma} > \sigma$ beliebig angenommen wird, also für alle ganzen positiven μ

$$|u^\mu(t)| < \frac{K^\mu}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-1}} e^{\tilde{\sigma}|t|}.$$

Wir weisen nach, daß im Sektor $-\pi+\theta \leqq \arg t \leqq \pi-\theta$

$$|Q_n(t)| < L_n e^{\tilde{\sigma}|t|}$$

ist, wo $\tilde{\sigma}$ und L_n hinreichend große positive Zahlen sind.

Zunächst ist in diesem Sektor, wenn $\tilde{\sigma} > \sigma$ angenommen wird,

$$|w^\mu(t)| \leqq \frac{K^\mu e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-1}}.$$

Wenn die in Bd. 144, S. 172 eingeführte Zahl k mit h' bezeichnet und $\sigma \geqq h$ angenommen wird, ist

$$|G_n(t)| \leqq Ghh'^n e^{h|t|} \leqq Ghh'^n e^{\sigma|t|} \leqq Ghh'^n e^{\tilde{\sigma}|t|},$$

$$|G_\mu w^{\mu-n}(t)| \leqq \frac{Ghh'^\mu K^{\mu-n} e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-1}};$$

$$|Q_n(t)| \leqq \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\mu}{n} Gh'^\mu \frac{K^{\mu-n} e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-n-1}} + \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\mu}{n} \frac{Ghh'^\mu K^{\mu-n} e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-n}},$$

wo in der ersten Summe das zu $\mu = n$ gehörige Glied hinzugefügt ist, während das erste Glied der zweiten Summe nicht kleiner ist als der absolute Betrag von $G_n(t)$. Setzt man $H = G(\tilde{\sigma}-\sigma+h)$, so ist

$$|Q_n(t)| \leqq H h'^n e^{\tilde{\sigma}|t|} \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\mu}{n} \left(\frac{Kh'}{\tilde{\sigma}-\sigma}\right)^{\mu-n}.$$

Wir nehmen

$$\tilde{\sigma} > \sigma + Kh'$$

an, so daß

$$\zeta = \frac{Kh'}{\tilde{\sigma}-\sigma} < 1$$

ist. Durch n-malige Differentiation der Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \zeta^\mu = \frac{1}{1-\zeta}$$

und Division mit $n!$ erhält man

$$\sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\mu}{n} \zeta^\mu = \frac{1}{(1-\zeta)^{n+1}}.$$

Demnach ist

$$|Q_n(t)| \leqq L_n e^{\tilde{\sigma}|t|}, \quad L_n = \frac{H h'^n}{(1-\zeta)^{n+1}}.$$

Die Formel in § 10

$$g_n = A_{0n} + \int_0^\infty Q_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

ist für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\sigma}$ gültig*).

Wir verstehen jetzt unter $\mathfrak{S}$ einen der beiden Sektoren $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ und $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq -\theta$, in welchen die Funktionen $w_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ regulär sind. Wenn die positiven Zahlen σ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Bedingung $\tilde{\sigma} < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots$ gemäß irgendwie angenommen sind, sind, wie wir zeigen werden, positive Größen K_n so vorhanden, daß in $\mathfrak{S}$

$$|w_n(t)| < K_n e^{\sigma_n |t|}$$

ist. Soweit es sich um $w_1(t)$ handelt, kann unter $\mathfrak{S}$ der Sektor $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ verstanden werden.

Zunächst sei $n = 1$. Es sei R eine positive Zahl und K_1 so groß, daß für $|t| \leqq R$ und für alle ω von $\mathfrak{S}$

$$|w_1(t)| < K_1 e^{\sigma_1 |t|}$$

ist. Wir behaupten, daß, wenn R hinreichend groß ist, diese Ungleichung auch für $|t| > R$ und für alle ω von $\mathfrak{S}$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so verstehen wir unter R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für

---

*) Dies folgt aus dem Satze: „Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in jedem Intervall $a \leqq x \leqq b$, wo b willkürlich, aber endlich ist, gleichmäßig konvergiert und wenn $\varphi(x)$ für alle endlichen Werte von x stetig ist, dann ist

$$\int_a^\infty \varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^\infty \varphi(x) f_n(x)\, dx,$$

vorausgesetzt, daß $\int_a^\infty |\varphi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\, dx$ konvergiert." Vgl. *Bromwich*, Infinite Series (London 1908), S. 453. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $f_n(x)$ der reellen Veränderlichen x dürfen komplex sein. — Oben ist x durch $|t|$ zu ersetzen, $\varphi(x)$ durch $e^{-\frac{t}{x}}$ und $f_n(x)$ durch ein Glied der in § 10 aufgestellten Reihe für $Q_n(t)$, für dessen absoluten Betrag eine obere Schranke angegeben ist.

welche die Ungleichung nicht bei allen Werten von ω gilt. Dann ist ein Wert $\omega = \omega'$ so vorhanden, daß für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$

$$|w_1(t)| = K_1 e^{\sigma_1 |t|}$$

ist, während für $|t| \leqq R'$ und für alle ω von $\mathfrak{S}$

$$|w_1(t)| \leqq K_1 e^{\sigma_1 |t|}$$

ist. Aus der Integralgleichung $(E_1^{(1)})$ folgt

$$|w_1(t)| \leqq \frac{1}{|t|}\left\{|Q_1 w_1(t)| + |a| \int_0^{|t|} |w_1(\tau)|\, d|\tau| + |Q_1(t)| + |a|\right\}.$$

Für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$ ist

$$K_1 e^{\sigma_1 |t|} \leqq \frac{1}{|t|}\left\{\frac{K_1 L_1 e^{\sigma_1 |t|}}{\sigma_1 - \tilde{\sigma}} + \frac{|a| K_1 e^{\sigma_1 |t|}}{\sigma_1} + L_1 e^{\tilde{\sigma}|t|} + |a|\right\},$$

also nach Division mit $K_1 e^{\tilde{\sigma}_1 |t|}$

$$1 \leqq \frac{1}{|t|}\left(\frac{L_1}{\sigma_1 - \tilde{\sigma}} + \frac{|a|}{\sigma_1} + \frac{L_1}{K_1} e^{-(\sigma_1 - \tilde{\sigma})|t|} + \frac{|a|}{K_1} e^{-\sigma_1 |t|}\right).$$

Die rechte Seite hat für $\lim |t| = \infty$ den Grenzwert 0. Nimmt man R hinreichend groß, so ist die rechte Seite der für $|t| = R' > R$ geltenden Ungleichung kleiner als 1; es ist also ein Widerspruch vorhanden*).

Indem wir zu $n = 2$ übergehen, nehmen wir K_2 so groß an, daß für $|t| \leqq R$ und für alle ω von $\mathfrak{S}$

$$|w_2(t)| < K_2 e^{\sigma_2 |t|}$$

ist. Wie oben müssen, wenn diese Ungleichung nicht immer gilt, Werte R' und ω' so vorhanden sein, daß für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$

$$|w_2(t)| = K_2 e^{\sigma_2 |t|},$$

für $|t| \leqq R'$ und für alle ω von $\mathfrak{S}$

$$|w_2(t)| \leqq K_2 e^{\sigma_2 |t|}$$

ist. Aus der Integralgleichung $(E_1^{(2)})$ folgt

$$|w_2(t)| \leqq \frac{1}{|t-1|}\left\{|Q_1 w_2(t)| + \cdots + |Q_2 w_1^2(t)|\right\}.$$

Wir nehmen $\sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 \leqq \sigma_2$ an. Dann ist im Sektor $\mathfrak{S}$

$$|w_1^2(t)| < \frac{K_1^2 e^{\tilde{\sigma}_1 |t|}}{\tilde{\sigma}_1 - \sigma_1}.$$

Für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$ ist

---

*) Vgl. Jahresber. d. Math.-Ver. 24, 1915, S. 321—322 und *Perron*, Journ. f. Math. 143, S. 26—28.

$$K_2\, e^{\sigma_2 |t|} \leqq \frac{1}{|t-1|} \left\{ \frac{L_1 K_2}{\sigma_2 - \tilde{\sigma}}\, e^{\sigma_2 |t|} + \cdots + \frac{L_2 K_1^2}{(\sigma_1 - \sigma_1)^2}\, e^{\tilde{\sigma_1} |t|} \right\}$$

oder nach Division mit $K_2\, e^{\sigma_2 |t|}$

$$1 \leqq \frac{1}{|t-1|} \left(\frac{L_1}{\sigma_2 - \tilde{\sigma}} + \cdots + \frac{L_2 K_1^2}{K_2 (\tilde{\sigma}_1 - \sigma_1)^2}\, e^{-(\sigma_2 - \tilde{\sigma_1})\, |t|} \right).$$

Da die rechte Seite für $\lim |t| = \infty$ den Grenzwert 0 hat, ist wie vorhin ein Widerspruch vorhanden.

Dieselbe Schlußweise läßt sich auf $w_n(t)$ anwenden.

Für ein festes n ist die Ungleichung

$$|w_n(t)| < K_n\, e^{\sigma_n |t|}$$

im Sektor $\mathfrak{S}$ erfüllt, wenn $\sigma_n > \tilde{\sigma}$ und K_n hinreichend groß angenommen wird. Demnach ist das über die in $\mathfrak{S}$ gelegene Gerade $\arg t = \omega$ erstreckte *Laplace*sche Integral

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^\infty w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$$

in dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma_n$ oder, da σ_n beliebig wenig größer als $\tilde{\sigma}$ ist, in dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\sigma}$ konvergent.

Die Funktion $w_n(t)$ ist für $|t| < 1$, sowie oberhalb und unterhalb, aber nicht überall auf der reellen Achse regulär. Das Konvergenzgebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\sigma}$ des *Laplace*schen Integrals φ_n überstreicht, wenn sich ω zwischen 0 und π ändert, ein dem Sektor $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ angehörendes Gebiet, in welchem die Funktion φ_n regulär ist. Da nach § 9 nur eine Lösung der linearen Differentialgleichung $(D^{(n)})$ endlich bleibt, wenn x mit einem zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gelegenen Argument zur Null geht, so stimmt das jetzt mit φ_n bezeichnete *Laplace*sche Integral mit der nach § 9 mit $\varphi_n^{(0)}$ zu bezeichnenden Funktion überein. Wenn ω zwischen 0 und $-\pi$ variiert, überstreicht das Konvergenzgebiet des Integrals

$$\bar{\varphi}_n = C_{0n} + \int_0^\infty w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

ein Gebiet, welches dem Sektor $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ angehört. Die jetzige Funktion $\bar{\varphi}_n$ stimmt mit der Funktion $\bar{\varphi}_n^{(0)}$ in § 9 überein. Die Funk-

tionen φ_n und $\bar{\varphi}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, die beide in der rechten Halbebene definiert sind, stimmen in dieser nicht überein, denn der Integrationsweg von φ_n verläuft oberhalb, derjenige von $\bar{\varphi}_n$ unterhalb der positiven reellen Achse, welche eine singuläre Stelle von $w_n(t)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ enthält. Wegen des regulären Verhaltens von $w_1(t)$ auf der positiven reellen Achse stimmen φ_1 und $\bar{\varphi}_1$ in der rechten Halbebene überein; in der linken Halbebene hat man φ_1 oder $\bar{\varphi}_1$, je nachdem man die Fortsetzung aus der rechten in die linke Halbebene im positiven oder im negativen Sinne vornimmt.

Wir haben folgendes Ergebnis von § 10 und § 11:

Die Integralgleichungen $(E_1^{(n)})$ *werden durch Funktionen* $w_n(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *befriedigt, welche sich sowohl für* $|t| < 1$ *als auch für* $0 < \arg t < \pi$ *und für* $\pi < \arg t < 2\pi$ *regulär verhalten. Für* $|t| < 1$ *bestehen die konvergenten Reihenentwicklungen*

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

während die Differentialgleichung $(D_1^{(n)})$ *für* φ_n *durch die im allgemeinen divergente Reihe*

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^n$$

formal befriedigt wird. In jedem der beiden Sektoren $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ *und* $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq -\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ *ist*

$$|w_n(t)| < K_n e^{\sigma_n |t|} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

wo $\tilde{\sigma} > \sigma$ *hinreichend groß,* $\sigma_n > \tilde{\sigma}$ *und* K_n *hinreichend groß ist. Das über die Gerade* $\arg t = \omega$ *erstreckte, in dem Kreise* $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\sigma}$ *konvergente Laplacesche Integral*

$$C_{0n} + \int_0^{\infty} w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

genügt der Differentialgleichung $(D_1^{(n)})$ *und definiert in hinreichender Nähe von* $x = 0$ *im Sektor* $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ *die Funktion* φ_n, *wenn* $0 < \omega < \pi$, *und im Sektor* $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ *die Funktion* $\bar{\varphi}_n$, *wenn* $-\pi < \omega < 0$ *ist.*

Es sei $0 < \theta < \theta' < \frac{\pi}{2}$ und $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$; t gehöre dem Sektor

$|\arg t| \leqq \pi - \theta'$ oder dem Kreise $|t| \leqq 1 - \varepsilon'$ an, und es sei ϱ höchstens gleich $(1 - \varepsilon) \sin(\theta' - \theta)$ und höchstens gleich $\varepsilon' - \varepsilon$, so daß der Kreis $\mathfrak{C}$ vom Mittelpunkt t und vom Radius ϱ in dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ oder in dem Kreise $|t| \leqq 1 - \varepsilon$ liegt. Für einen Punkt τ auf der Peripherie von $\mathfrak{C}$ ist $\tau = t + \varrho e^{i\vartheta}$, $\vartheta = 0 \dots 2\pi$, also $|\tau| \leqq |t| + \varrho$ und $|w(\tau)| \leqq K e^{\sigma|\tau|} \leqq K e^{\sigma(|t|+\varrho)}$. Nach dem *Cauchy*schen Integralsatz ist für $\nu = 1, 2, \cdots$

$$\frac{d^\nu w(t)}{dt^\nu} = \frac{\nu!}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{w(\tau)\, d\tau}{(\tau - t)^{\nu+1}},$$

$$\left|\frac{d^\nu w(t)}{dt^\nu}\right| \leqq \frac{\nu!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K e^{\sigma(|t|+\varrho)}\, \varrho\, d\vartheta}{\varrho^{\nu+1}},$$

also, wenn $K e^{\sigma\varrho} < \mathfrak{K}$ ist,

$$\left|\frac{d^\nu w(t)}{dt^\nu}\right| < \frac{\nu!\, \mathfrak{K} e^{\sigma|t|}}{\varrho^\nu}.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = -\left(x w(t) + x^2 \frac{dw(t)}{dt} + \cdots + x^{n+1} \frac{d^n w(t)}{dt^n}\right) e^{-\frac{t}{x}} + x^{n+1} \int \frac{d^{n+1} w(t)}{dt^{n+1}} e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Wir integrieren zwischen den Grenzen 0 und ∞ auf der Geraden $\arg t = \omega$ ($|\omega| \leqq \pi - \theta'$); wenn x dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$ angehört, ist

$$\lim_{t=\infty} \frac{d^\nu w(t)}{dt^\nu} e^{-\frac{t}{x}} = 0,$$

und für $t = 0$ ist

$$\frac{d^\nu w(t)}{dt^\nu} = C_\nu.$$

Es ist also, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \int_0^\infty \frac{d^n w(t)}{dt^n} e^{-\frac{t}{x}} dt$$
$$= C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$

$$\gamma_n = C_{n+1} + \int_0^\infty \frac{d^n w(t)}{dt^n} e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Man hat (vgl. § 3)

$$|\gamma_n| \leqq A(n+1)!\,(1+\delta)^{n+1} + \frac{(n+1)!\,\mathfrak{K}}{\varrho^{n+1}} \int_0^\infty e^{(\sigma - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right))|t|} d|t|$$

oder, wenn

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma' > \sigma$$

angenommen wird,

$$|\gamma_n| \leqq A\,(n+1)!\,(1+\delta)^{n+1} + \frac{\Re\,(n+1)!}{(\sigma'-\sigma)\,\varrho^{n+1}} \leqq \frac{\mathfrak{A} n!}{\varrho^n}.$$

Läßt man ω zwischen $-\pi+\theta'$ und $\pi-\theta'$ variieren, so erfüllt γ_n diese Ungleichung in der von den Kreisen $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma'$ überstrichenen Fläche. Wenn $\delta > \theta'$ angenommen wird, wird der Kreis $\Re\left(\frac{e^{\pm i\,(\pi-\theta')}}{x}\right) = \sigma'$ von der Halbgeraden $\arg x = \pm\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)$ in einem Punkt x geschnitten, für welchen $|x| = \frac{\sin(\delta-\theta')}{\sigma'}$ ist. Das Gebiet

$$-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta,\quad |x| < \frac{\sin(\delta-\theta')}{\sigma'}$$

liegt also innerhalb der erwähnten Fläche. Es ist

$$\eta = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x^\nu + \gamma_n x^{n+1},$$

wo $|\gamma_n|$ unter einer endlichen Größe liegt, wenn $-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$ und $|x|$ hinreichend klein ist; d. h. im Sektor $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ besteht in der Nähe von $x=0$ die asymptotische Gleichung

$$\eta \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu x^\nu.$$

Die bisherige Schlußweise läßt sich auch auf die Funktionen $w_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ anwenden. Für $\theta' \leqq \arg t \leqq \pi-\theta'$, für $-\pi+\theta' \leqq \arg t \leqq -\theta'$ und für $|t| \leqq 1-\varepsilon'$ besteht eine Ungleichung

$$\left|\frac{d^\nu w_n(t)}{dt^\nu}\right| < \frac{\nu!\,\Re_n\,e^{\sigma_n|t|}}{\varrho^\nu}.$$

Im Sektor $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ ist

$$\varphi_n \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu$$

und im Sektor $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$

$$\bar{\varphi}_n \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu.$$

§ 12.

Bei der Behandlung des Falles $k > 1$ benutzen wir einige Hilfsformeln.

Das Produkt der beiden über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckten verallgemeinerten *Laplace*schen Integrale

$$F(x) = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, u_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,\quad G(x) = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, v_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt$$

soll in ein Integral von derselben Form verwandelt werden. Auf der Geraden $\arg t = \omega$ sei

$$|u_p(t)| < K e^{\sigma|t|},\quad |v_p(t)| < K e^{\sigma|t|},$$

so daß die beiden Integrale für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \sigma$ konvergent sind. Zunächst ist

$$F(x)\,G(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \int_0^t \sum_{p'=0}^{k-1} x^{p'}\, u_{p'}(\tau) \sum_{p''=0}^{k-1} x^{p''}\, v_{p''}(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \sum_{p'=0}^{k-1}\sum_{p''=0}^{k-1} x^{p'+p''}\, u_{p'}\, v_{p''}(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \left\{ \sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{q=0}^{p} u_q\, v_{p-q}(t) + \sum_{p=0}^{k-2} x^{p+k} \sum_{q=p+1}^{k-1} u_q\, v_{p+k-q}(t) \right\};$$

durch partielle Integration erhält man

$$x^k \int_0^\infty u_q\, v_{p+k-q}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt = \int_0^\infty \int_0^t u_q\, v_{p+k-q}(\tau)\, d\tau \cdot e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,$$

denn wenn $\tilde{\sigma} > \sigma$ ist, ist

$$|u_q\, v_{p+k-q}(t)| < \frac{K^2}{\tilde{\sigma}-\sigma}\, e^{\tilde{\sigma}|t|},\quad \left| \int_0^t u_q\, v_{p+k-q}(\tau)\, d\tau \right| < \frac{K^2}{\tilde{\sigma}-\sigma}\, \frac{e^{\tilde{\sigma}|t|}}{\tilde{\sigma}},$$

also für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\sigma}$ und daher auch für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \sigma$

$$\left[e^{-\frac{t}{x^k}} \int_0^t u_q\, v_{p+k-q}(\tau)\, d\tau \right]_0^\infty = 0;$$

es ist also

$$F(x)\,G(x) = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, W_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,$$

$$W_p(t) = \sum_{q=0}^{p} u_q\, v_{p-q}(t) + \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} u_q\, v_{p+k-q}(\tau)\, d\tau.$$

Für konstante A_p und B_p ist

$$\sum_{p=0}^{k-1} A_p x^p \cdot \sum_{p=0}^{k-1} B_p x^p = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{q=0}^{p} A_q B_{p-q} + \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-2} x^p \sum_{q=p+1}^{k-1} A_q B_{p+k-q}\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt;$$

$$\sum_{p=0}^{k-1} A_p x^p \cdot \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, u_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{q=0}^{p} A_{p-q}\, u_q(t) + \sum_{p=0}^{k-2} x^p \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} A_{p+k-q}\, u_q(\tau)\, d\tau \right\} e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt.$$

Nach § 7 hat die Differentialgleichung (A) die partikuläre Lösung

$$\eta = \eta_m = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, w_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt;$$

dabei wird über die Gerade $\arg t = \omega$ integriert, und x gehört dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \sigma, \quad \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2} + \omega}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \omega}{k}$$

an. Auf Grund der obigen Formel ist

$$\eta^2 = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, w_p^{(2)}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,$$

$$w_p^{(2)}(t) = \sum_{q=0}^{p} w_q\, w_{p-q}(t) + \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} w_q\, w_{p+k-q}(\tau)\, d\tau$$

und für jedes ganze positive μ

$$\eta^\mu = \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, w_p^{(\mu)}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,$$

$$w_p^{(\mu)}(t) = \sum_{q=0}^{p} w_q\, w_{p-q}^{(\mu-1)}(t) + \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} w_q\, w_{p+k-q}^{(\mu-1)}(\tau)\, d\tau.$$

Die Bezeichnung $w_p^{(\mu)}(t)$ ist von der früheren Bezeichnung $w_p^\mu(t)$ zu unterscheiden; es ist $w_p^{(1)}(t) = w_p(t)$. Für $\mu \geqq 2$ ist $w_p^{(\mu)}(0) = 0$.

Wir bringen g_n auf die Form eines verallgemeinerten *Laplace*schen Integrals. Unter Einführung der ganzen transzendenten Funktionen

$$G_{p\mu}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{p+\nu k,\mu} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu}\, x^{\lambda} = \sum_{p=0}^{k-1} A_{p\mu}\, x^{p} + \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, G_{p\mu}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt.$$

Man hat

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda n}\, x^{\lambda} + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu}\, x^{\lambda} \cdot \eta^{\mu-n} \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} A_{pn}\, x^{p} + \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, G_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \sum_{p=0}^{k-1} A_{p\mu}\, x^{p} \cdot \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, w_p^{(\mu-n)}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, G_{p\mu}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \cdot \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, w_p^{(\mu-n)}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} A_{pn}\, x^{p} + \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, G_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_{0}^{\infty} \Bigg\{ \sum_{p=0}^{k-1}{}' x^{p} \sum_{q=0}^{p} A_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(t) \\
&+ \sum_{p=0}^{k-2} x^{p} \int_{0}^{t} \sum_{q=p+1}^{k-1} A_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(\tau)\, d\tau \Bigg\} e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_{0}^{\infty} \Bigg\{ \sum_{p=0}^{k-1} x^{p} \sum_{q=0}^{p} G_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(t) \\
&+ \sum_{p=0}^{k-2} x^{p} \int_{0}^{t} \sum_{q=p+1}^{k-1} G_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(\tau)\, d\tau \Bigg\} e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
Q_{pn}(t) &= G_{pn}(t) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \sum_{q=0}^{p} A_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(t) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \sum_{q=0}^{p} G_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(t) \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_{0}^{t} \sum_{q=p+1}^{k-1} A_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(\tau)\, d\tau \\
&+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \binom{\mu}{n} \int_{0}^{t} \sum_{q=p+1}^{k-1} G_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu-n)}(\tau)\, d\tau,
\end{aligned}$$

wo die beiden letzten Summen im Falle $p = k-1$ fehlen, so ist

$$g_n = \sum_{p=0}^{k-1} A_{pn}\, x^{p} + \int_{0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^{p}\, Q_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^{k}}}\, dt$$

für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\sigma}$, wo $\tilde{\sigma}$ in § 13 bestimmt wird. Insbesondere ist

$$g_1 = -1 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} + \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p Q_{p1}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt.$$

Wegen $w_p(0) = C_{p+k}$, $G_{p1}(0) = A_{p+k,1}$ ist

$$Q_{p1}(0) = A_{p+k,1} + 2\,(A_{02} C_{p+k} + \cdots + A_{p2} C_k) = a_{p+k}.$$

Wir suchen φ_n als verallgemeinertes *Laplace*sches Integral darzustellen:

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} C_{pn} x^p + \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt.$$

Wir setzen $X = x^k$ und

$$\psi_{pn} = \int_0^\infty w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{X}}\, dt, \quad h_{pn} = \int_0^\infty Q_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

so daß

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} x^p (C_{pn} + \psi_{pn}),$$

$$g_1 = \sum_{p=0}^{k-1} x^p (a_p + h_{1p}),\ a_0 = -1;\quad g_n = \sum_{p=0}^{k-1} x^p (A_{pn} + Q_{pn}) \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Ferner ist

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_n}{dx} = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left\{ k X^2 \frac{d\psi_{pn}}{dX} + pX(C_{pn} + \psi_{pn}) \right\},$$

$$\sum_{p=0}^{k-1} a_p x^p \cdot \varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left(-C_{pn} + \sum_{q=0}^{p-1} a_{p-q} C_{qn} + X \sum_{q=p+1}^{k-1} a_{p+k-q} C_{qn} \right)$$
$$+ \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left(-\psi_{pn} + \sum_{q=0}^{k-1} a_{p-q} \psi_{qn} + X \sum_{q=p+1}^{k-1} a_{p+k-q} \psi_{qn} \right),$$

$$x^k \varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \cdot X (C_{pn} + \psi_{pn}),$$

$$\left(g_1 - \sum_{p=0}^{k-1} a_p x^p\right)\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} h_{p1} x^p \cdot \varphi_n$$
$$= \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left(\sum_{q=0}^{p} C_{qn} h_{p-q,1} + X \sum_{q=p+1}^{k-1} C_{qn} h_{p+k-q,1} \right)$$
$$+ \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left(\sum_{q=0}^{p} h_{p-q,1} \psi_{qn} + X \sum_{q=p+1}^{k-1} h_{p+k-q,1} \psi_{qn} \right).$$

Die Differentialgleichung $(D^{(n)})$

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_n}{dx} + (n-1) \sum_{p=0}^{k-1} a_p x^p \cdot \varphi_n + n a_k x^k \varphi_n = \left(g_1 - \sum_{p=0}^{k-1} a_p x^p\right)\varphi_n + \cdots$$

ist erfüllt, wenn die Funktionen ψ_{pn} von X den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$kX^2\frac{d\psi_{pn}}{dX}-(n-1)\,\psi_{pn}+(n-1)\,a_1\,\psi_{p=1,n}+\cdots+(n-1)\,a_p\,\psi_{0n}$$

$$=\sum_{q=0}^{p-1}h_{p-q,1}\,\psi_{qn}+(h_{01}-(na_k+p)X)\,\psi_{pn}+X\sum_{q=p+1}^{k-1}(h_{p+k-q,1}-(n-1)a_{p+k-q})\,\psi_{qn}$$

$$+\sum_{q=0}^{p-1}C_{qn}h_{p-q,1}+C_{pn}(h_{01}-(na_k+p)X)+X\sum_{q=p+1}^{k-1}C_{qn}(h_{p+k-q,1}-(n-1)a_{p+k-q})+\cdots.$$

Es ist

$$X^2\frac{d\psi_{pn}}{dX}=\int_0^\infty t\,w_{pn}(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

$$X\psi_{pn}=\int_0^\infty\int_0^t w_{pn}(\tau)\,d\tau\cdot e^{-\frac{t}{X}}\,dt,\quad h_{p-q,1}\,\psi_{qn}=\int_0^\infty Q_{p-q,1}\,w_{qn}(t)\,e^{-\frac{t}{X}}\,dt,$$

$$Xh_{p+k-q,1}\,\psi_{qn}=\int_0^\infty\int_0^t Q_{p+k-q,1}\,w_{qn}(\tau)\,d\tau\,.\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt=\int_0^\infty\bar{Q}_{p+k-q,1}\,w_{qn}(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

wenn die Bezeichnung

$$\bar{Q}_{p1}(t)=\int_0^t Q_{p1}(t)\,dt$$

benutzt wird, denn es ist

$$\int_0^t Q_{p+k-q,1}\,w_{qn}(t)\,dt=\int_0^t dt\int_0^t Q_{p+k-q,1}(t-\tau)\,w_{qn}(\tau)\,d\tau$$

$$=\int_0^t w_{qn}(\tau)\,d\tau\int_\tau^t Q_{p+k-q,1}(t-\tau)\,dt=\int_0^t\bar{Q}_{p+k-q,1}(t-\tau)\,w_{qn}(\tau)\,d\tau.$$

Demnach sind die Differentialgleichungen für die Funktionen ψ_{pn} erfüllt, wenn die Funktionen $w_{pn}(t)$ den folgenden Integralgleichungen genügen:

$$(E^{(n)})\quad\begin{cases}(kt-n+1)\,w_{pn}(t)+(n-1)\,a_1\,w_{p-1,n}(t)+\cdots+(n-1)\,a_p\,w_{0n}(t)\\ \quad=\sum_{q=0}^{p-1}\int_0^t Q_{p-q,1}(t-\tau)\,w_{qn}(\tau)\,d\tau+\int_0^t(Q_{01}(t-\tau)-na_k-p)\,w_{pn}(\tau)\,d\tau\\ +\sum_{q=p+1}^{k-1}\int_0^t(\bar{Q}_{p+k-q,1}(t-\tau)-(n-1)\,a_{p+k-q})\,w_{qn}(\tau)\,d\tau\\ \quad+\sum_{q=0}^{p-1}C_{qn}\,Q_{p-q,1}(t)+C_{pn}(Q_{01}(t)-na_k-p)\\ +\sum_{q=p+1}^{k-1}C_{qn}(\bar{Q}_{p+k-q,1}(t)-(n-1)\,a_{p+k-q})+\cdots\end{cases}\qquad(p=0,1,\ldots k-1).$$

Im Falle $p=k-1$ kommen Glieder mit den Funktionen $\bar{Q}$ nicht vor.

Die Differentialgleichungen für die ψ_{pn} werden durch die Reihen

$$\psi_{pn} = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{p+\nu k, n} X^{\nu}$$

formal befriedigt; dann stellen, wie man nach § 2 erkennt, die Reihen

$$w_{pn}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{p+\nu k, n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

eine Lösung der Integralgleichungen $(E^{(n)})$ dar.

Die Integralgleichungen für die Funktionen $w_p(t)$, die in § 6 in der Form (B_k) geschrieben waren, lassen sich in der jetzigen Bezeichnungsweise folgendermaßen bilden. Es ist

$$x^{k+1} \frac{d\eta}{dx} = \int_0^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^p \left(k t\, w_p(t) + p \int_0^t w_p(\tau)\, d\tau\right) e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Der obige Ausdruck für g_n geht, wenn man $n = 0$ und $A_{01} = -1$ setzt, über in

$$-\eta + f(x, \eta) = \sum_{\lambda=k}^{\infty} A_{\lambda 0} x^{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^{\lambda} \cdot \eta^{\mu} = \int_0^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^p\, Q_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt;$$

$$Q_p(t) = G_{p0}(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} A_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} G_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(t)$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} A_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(\tau)\, d\tau + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} G_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(\tau)\, d\tau.$$

Die Differentialgleichung (A) ist erfüllt, wenn die Funktionen $w_p(t)$ den folgenden Integralgleichungen genügen:

$$(B)\quad \begin{cases} (1+kt)\, w_p(t) = \sum_{q=0}^{p-1} a_{p-q} w_q(t) - p \int_0^t w_p(\tau)\, d\tau + \sum_{q=p+1}^{k-1} a_{p+k-q} \int_0^t w_q(\tau)\, d\tau \\ \quad + \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} A_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{k-1} A_{p+k-q,\mu} \int_0^t w_q^{(\mu)}(\tau)\, d\tau \\ + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} G_{p-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{k-1} \int_0^t G_{p+k-q,\mu}\, w_q^{(\mu)}(\tau)\, d\tau + G_{p0}(t) \quad (p=0,1,\ldots k-1.) \end{cases}$$

§ 13.

Für $n = 1$ gelten die Integralgleichungen

$$(E^{(1)}) \quad \begin{cases} kt\, w_{p1}(t) = \int_0^t \sum_{q=0}^{p-1} Q_{p-q,1}(t-\tau)\, w_{q1}(\tau)\, d\tau + \int_0^t (Q_{01}(t-\tau) - a_k - p)\, w_{p1}(\tau)\, d\tau \\ + \int_0^t \sum_{q=p+1}^{k-1} \bar{Q}_{p+k-q,1}(t-\tau)\, w_{q1}(\tau)\, d\tau + \sum_{q=0}^{p-1} C_{q1}\, Q_{p-q,1}(t) \\ + C_{p1}(Q_{01}(t) - a_k - p) + \sum_{q=p+1}^{k-1} C_{q1}\, \bar{Q}_{p+k-q,1}(t) \end{cases} \qquad (p=0,1,\ldots k-1).$$

Wegen $Q_{p1}(0) = a_{p+k}$ hat die Summe der von den w_{q1} freien Glieder auf der rechten Seite von $(E^{(1)})$ für $t=0$ den Wert

$$C_{01}\, a_{p+k} + \cdots + C_{p-1,1}\, a_{p+1} - p\, C_{p1} = 0.$$

Die Koeffizienten von

$$w_{01}(\tau), \ldots w_{p-1,1}(\tau), w_{p1}(\tau), w_{p+1,1}(\tau), \ldots w_{k-1,1}(\tau)$$

unter den Integralen auf der rechten Seite von $(E^{(1)})$ sind Funktionen von $t-\tau$, welche für $t-\tau=0$ die Werte

$$a_{p+k}, \ldots a_{1+k}, -p, \ldots 0$$

annehmen. Indem man an Stelle von $w_{p1}(t)$ $(p=0, 1, \ldots k-1)$ geeignete lineare Funktionen mit konstanten Koeffizienten $W_p(t)$ $(p=0, 1, \ldots k-1)$ einführt, erhält man Gleichungen von der Form

$$kt\, W_p(t) = \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^t F_{pq}(t-\tau)\, W_q(\tau)\, d\tau + F_p(t) \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

wo

$$F_{pp}(0) = -p,\ F_{pq}(0) = 0\ (p \gtrless q),\ F_p(0) = 0$$

ist. Durch Differentiation erhält man die Gleichungen

$$kt \frac{dW_p(t)}{dt} + (p+k)\, W_p(t) = \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^t F'_{pq}(t-\tau)\, W_q(\tau)\, d\tau + F'_p(t),$$

die wir durch sukzessive Annäherung lösen. Die Gleichungen

$$kt \frac{dW_p^{(0)}(t)}{dt} + (p+k)\, W_p^{(0)}(t) = F'_p(t),$$

$$kt \frac{dW_p^{(\nu)}(t)}{dt} + (p+k)\, W_p^{(\nu)}(t) = \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^t F'_{pq}(t-\tau)\, W_q^{(\nu-1)}(\tau)\, d\tau \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

werden durch die Funktionen

$$W_p^{(0)}(t) = \frac{1}{k}\, t^{-\frac{p}{k}-1} \int_0^t t^{\frac{p}{k}} F'_p(t)\, dt,$$

$$W_p^{(\nu)}(t) = \frac{1}{k}\, t^{-\frac{p}{k}-1} \int_0^t t^{\frac{p}{k}}\, dt \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^t F'_{pq}(t-\tau)\, W_q^{(\nu-1)}(\tau)\, d\tau \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

befriedigt, so daß $W_p^{(\nu)}(t)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ wie die von den $w_p(t)$ abhängigen Koeffizienten unserer Gleichungen in dem Kreis $|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k}$ und in dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ regulär ist und den Faktor t^ν enthält. Für $|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k}$ und für $|\arg t| \leqq \pi - \theta$, $|t| \leqq r$ (r beliebig groß) sei $|F'_{pq} t| < M$, $|F'_p(t)| < N$. Dann ist

$$|W_p^{(0)}(t)| < \frac{N}{k}, \quad |W_p^{(\nu)}(t)| < \frac{N}{k} \frac{(M|t|)^\nu}{(\nu!)^2(\nu+1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

wie man durch den Schluß von $\nu - 1$ auf ν erkennt. Die Reihen

$$W_p(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_p^{(\nu)}(t)$$

sind absolut und gleichmäßig konvergent und genügen den obigen Integralgleichungen. Demnach werden die Integralgleichungen $(E^{(1)})$ durch Funktionen $w_{p1}(t)$ befriedigt, welche für $|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k}$ und für $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ (abgesehen von $t = \infty$) regulär sind.

Die Integralgleichungen $(E^{(n)})$ für $n > 1$, worin der Faktor von $w_{pn}(t)$ auf der linken Seite für $t = \frac{n-1}{k}$ verschwindet, haben eine Lösung $w_{pn}(t)$, welche sowohl für $|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k}$ als auch für $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ und für $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq -\theta$ regulär ist.

Die den Integralgleichungen $(E^{(n)})$ genügenden Reihen

$$w_{pn}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{p+\nu k, n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sind für $|t| < \frac{1}{k}$ konvergent.

Es sei $\tilde{\sigma} > \sigma$ und γ mindestens gleich k und mindestens gleich $1 + \frac{k-1}{\tilde{\sigma}}$. Dann ist für $|\arg t| \leqq \pi - \theta$

$$|w_p^{(\mu)}(t)| \leqq \frac{K^\mu \gamma^{\mu-1}}{(\tilde{\sigma} - \sigma)^{\mu-1}} e^{\tilde{\sigma}|t|}.$$

Denn nach § 7 ist

$$|w_p(t)| \leqq K e^{\sigma|t|},$$

und unter der Annahme

$$|w_p^{(\mu-1)}(t)| \leqq \frac{K^{\mu-1} \gamma^{\mu-2}}{(\tilde{\sigma} - \sigma)^{\mu-2}} e^{\tilde{\sigma}|t|}$$

folgt aus der Rekursionsformel für $w_p^{(\mu)}(t)$ in § 12

$$|w_p^{(\mu)}(t)| \leqq \frac{K \cdot K^{\mu-1} \gamma^{\mu-2}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-1}} \tilde{e}^{\tilde{\sigma}|t|} \left(p+1+\frac{k-p-1}{\tilde{\sigma}}\right),$$

wo der letzte Faktor höchstens gleich γ ist.

Aus der Formel für $Q_{pn}(t)$ in § 12 folgt, wenn

$$\tilde{\sigma} > \sigma + K h' \gamma$$

ist, eine Ungleichung

$$|Q_{pn}(t)| \leqq L_n e^{\tilde{\sigma}|t|}.$$

Wie in § 11 sei $\mathfrak{S}$ einer der Sektoren $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ und $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq -\theta$; σ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ seien positive Zahlen, welche die Bedingung $\tilde{\sigma} < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots$ erfüllen. Dann bestehen in $\mathfrak{S}$ Ungleichungen

$$|w_{pn}(t)| < K_n e^{\sigma_n |t|}.$$

Der Beweis wird wie in § 11 für $k = 1$ geführt.

Das über die in $\mathfrak{S}$ gelegene Gerade $\arg t = \omega$ erstreckte *Laplace*sche Integral

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} C_{pn} x^p + \int_0^\infty \sum_{p=0}^{k-1} x^p w_{pn}(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt$$

konvergiert in dem Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \sigma_n$ oder, da σ_n beliebig wenig größer als $\tilde{\sigma}$ ist, in dem Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\sigma}$, welches aus k von den Bögen einer Sinusspirale begrenzten Flächenstücken besteht (§ 7). Wenn sich ω zwischen 0 und π bewegt, überstreicht das dem Sektor

$$\frac{\omega - \frac{\pi}{2} + 2m\pi}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{\omega + \frac{\pi}{2} + 2m\pi}{k}$$

angehörende Flächenstück ein in dem Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

gelegenes Gebiet, in welchem eine Funktion $\varphi_n = \varphi_n^{(m)}$ definiert ist, während wir für $-\pi < \omega < 0$ eine in dem Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k}$$

definierte Funktion $\varphi_n = \bar{\varphi}_n^{(m)}$ erhalten. Wir benutzen allerdings die Funk-

tion $\varphi_n^{(m)}$ nur in dem Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$, in welchem die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \varphi_n^{(m)}$, und die Funktion $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ nur in dem Sektor $\bar{\mathfrak{S}}^{(m)}$, in welchem die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \bar{\varphi}_n^{(m)}$ konvergiert. Die jetzt mit $\varphi_n^{(m)}$ und $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ bezeichneten, durch *Laplace*sche Integrale dargestellten Funktionen stimmen mit den Funktionen $\varphi_n^{(m)}$ und $\varphi_n^{(m)}$ des § 9 überein, weil nur eine Lösung der Differentialgleichung $(D^{(n)})$ endlich bleibt, wenn sich x im Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}$ bzw. im Sektor $\bar{\mathfrak{S}}^{(m)}$ der Stelle 0 nähert.

Als Ergebnis von § 12 und § 13 haben wir den folgenden Satz, der mit dem am Schluß von § 9 ausgesprochenen Satze zu verbinden ist:

Die Integralgleichungen (E^n) *werden durch Funktionen* $w_{pn}(t)$ $(p = 0, 1, \ldots k-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *befriedigt, welche sich sowohl für* $|t| < \frac{1}{k}$ *als auch für* $0 < \arg t < \pi$ *und für* $-\pi < \arg t < 0$ *regulär verhalten. Für* $|t| < \frac{1}{k}$ *bestehen die konvergenten Reihenentwicklungen*

$$w_{pn}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{p+\nu k, n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

während die Differentialgleichung $(D^{(n)})$ *für* φ_n *durch die im allgemeinen divergente Reihe*

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^{\nu}$$

befriedigt wird. In jedem der beiden Sektoren $\theta \leqq \arg t \leqq \pi - \theta$ *und* $-\pi + \theta \leqq \arg t \leqq -\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ *ist*

$$|w_{pn}(t)| < K_n e^{\sigma_n |t|},$$

wo $\tilde{\sigma} > \sigma$ *hinreichend groß,* $\sigma_n > \tilde{\sigma}$ *und* K_n *hinreichend groß ist. Das über die Gerade* $\arg t = \omega$ *erstreckte, in dem Gebiet*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\sigma},\quad \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2} + \omega}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \omega}{k}$$

konvergente Laplacesche Integral

$$\sum_{p=0}^{k-1} C_{pn} x^p + \int_0^{\infty} \sum_{p=0}^{k-1} x^p w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt$$

genügt der Differentialgleichung $(D^{(n)})$ *und definiert in hinreichender Nähe von* $x = 0$ *im Sektor*

$$\frac{2m\pi-\frac{\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k}$$

die Funktion $\varphi_n^{(m)}$, *wenn* $0<\omega<\pi$, *und im Sektor*

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}}{k}$$

die Funktion $\bar{\varphi}_n^{(m)}$, *wenn* $-\pi<\omega<0$ *ist.*

Die Betrachtungen am Schlusse von § 11 lassen sich auf den Fall $k>1$ übertragen.

Es sei $0<\theta<\theta'<\frac{\pi}{2}$ und $0<\varepsilon<\varepsilon'<1$; t gehöre dem Sektor $|\arg t|\leqq\pi-\theta'$ oder dem Kreise $|t|\leqq\frac{1-\varepsilon'}{k}$ an; ϱ sei höchstens gleich $\frac{1-\varepsilon}{k}\sin(\theta'-\theta)$ und höchstens gleich $\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{k}$. Dann gelten Ungleichungen

$$\left|\frac{d^\nu w_p(t)}{dt^\nu}\right|<\frac{\nu!\,\Re e^{\sigma|t|}}{\varrho^\nu}.$$

Im Sektor $-\frac{3\pi}{2}<\arg X<\frac{3\pi}{2}$ gilt die asymptotische Gleichung

$$\int_0^\infty w_p(t)\,e^{-\frac{t}{X}}\,dt\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{p+\nu k}X^\nu;$$

daraus folgt die in dem Sektor $\mathfrak{S}_m$ gültige asymptotische Gleichung

$$\eta_m\sim\sum_{\nu=k}^{\infty}C_\nu\,x^\nu.$$

In den beiden Sektoren $\theta'\leqq\arg t\leqq\pi-\theta'$ und $-\pi+\theta'\leqq\arg t\leqq-\theta'$ ist

$$\left|\frac{d^\nu w_{pn}(t)}{dt^\nu}\right|<\frac{\nu!\,\Re_n e^{\sigma_n|t|}}{\varrho^\nu}.$$

Im Sektor $\frac{2m\pi-\frac{\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k}$ ist

$$\varphi_n^{(m)}\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{\nu n}x^\nu$$

und im Sektor $\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}}{k}$

$$\bar{\varphi}_n^{(m)}\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{\nu n}x^\nu.$$

Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper.

Von Herrn *Kurt Hensel* in Marburg a. d. L.

Die Fundamentalaufgabe, welche in der höheren Arithmetik gleich nach der Begründung der allgemeinen Theorie auftritt, ist die folgende:

Wie zerfällt eine reelle Primzahl in einem beliebigen auflösbaren Zahlkörper?

Diese Frage ist offenbar ein spezieller Fall des folgenden allgemeinen Problems, welches in dieser Arbeit vollständig gelöst werden soll:

Gegeben sei ein beliebiger algebraischer Körper K und in ihm eine reine Gleichung

$$x^l - A = 0.$$

Ist x eine Wurzel derselben, so wird durch sie ein Körper $K(x)$ über K definiert.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler des gegebenen Körpers K. Welches ist seine Zerlegung in dem höheren Körper $K(x)$?

Diese Frage ist ganz vollständig nur von *Kummer* für den nach ihm benannten *Kummer*schen Körper beantwortet worden, wo der gegebene Körper K der Körper $K(\zeta)$ der l^{ten} Einheitswurzeln $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ und in der Gleichung $x^l - A = 0$ A eine beliebige Zahl aus $K(\zeta)$ ist. Auch hier ist schon diese einfachste Frage mit den Hilfsmitteln der *Kummer*schen Idealtheorie bekanntlich keineswegs einfach zu lösen. Wenn man z. B. ihre Behandlung in *Hilbert*s Zahlbericht verfolgt, so sieht man, daß sie tiefliegende Sätze mit schwierigen Beweisen erfordert.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit*) habe ich dieses *Kummer*sche Ergebnis mit Hilfe einer neuen Methode begründet. Die Anwendung desselben Beweisverfahrens auf das allgemeine Problem ergibt das merkwürdige Resultat, daß das Zerlegungsgesetz in diesem Falle mit demjenigen im *Kummer*schen Zahlkörper vollständig übereinstimmt.

Es sei also jetzt $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler des gegebenen Unterkörpers K, welcher zu der reellen Primzahl p gehören möge; e sei seine Ordnung, d. h. p sei genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar; f sei sein Grad, d. h. es sei $n_K(\mathfrak{p}) \sim p^f$, und es werde $ef = \mu$ gesetzt. Endlich sei π eine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{p}$, d. h. eine durch $\mathfrak{p}$ ein einziges Mal teilbare Zahl von K.

Wir wollen nun die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ in dem durch die reine Gleichung

$$F(x) = x^l - A = 0 \tag{1.}$$

konstituierten Körper $K(x)$ über K kennen lernen, in welcher A eine beliebige Zahl von K sein soll, die nur nicht die l^{te} Potenz einer anderen Zahl desselben Körpers ist. Nach H. P. S. 113 brauchen wir hierzu nur zu untersuchen, wie sich die zugehörige Funktion $F(x) = x^l - A$ in dem Körper $K(\mathfrak{p})$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen π-adischen Zahlen $\alpha_0 + \alpha_1 \pi + \cdots$ in Primfaktoren zerlegt. In diesem, wie in jedem Zahlkörper zerfällt nämlich $F(x)$ eindeutig in ein Produkt $\Pi F_i(x)$ von unzerlegbaren Faktoren, welche alle voneinander verschieden sind, und die allgemeine Theorie lehrt, daß $\mathfrak{p}$ in $K(x)$ so viele verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_i$ besitzt, als $F(x)$ verschiedene Primfunktionen $F_i(x)$ enthält, und daß die Relativordnung e_i und der Relativgrad f_i von jedem einzelnen Primteiler $\mathfrak{P}_i$ aus dem zugehörigen Primfaktor $F_i(x)$ von $x^l - A$ sofort erschlossen werden kann.

Um die Zerlegung $x^l - A = \Pi F_i(x)$ im Körper $K(\mathfrak{p})$ angeben zu können, muß man die Zahl A des Körpers K als π-adische Zahl darstellen, aber nicht in der additiven Form $\alpha_\varrho \pi^\varrho + \alpha_{\varrho+1} \pi^{\varrho+1} + \cdots$, da die Untersuchung dann unnötige und unübersichtliche Rechnungen erfordern würde; ich weiß nicht einmal, ob die Aufgabe so überhaupt in voller Allgemeinheit gelöst werden kann. Man muß vielmehr A von vornherein in der

---

*) *K. Hensel*, Über die Zerlegung der Primteiler in relativ zyklischen Körpern nebst einer Anwendung auf die *Kummer*schen Körper ds. J. Bd. 151. S. 112—120. Ich werde diese Arbeit durch H. P. zitieren.

s. g. multiplikativen oder Exponentialdarstellung gegeben voraussetzen, welche für die Fragen der Zahlentheorie dieselben Vorteile bietet, wie sie die gewöhnliche Exponentialdarstellung $A = 10^{\alpha}$ der positiven Zahlen in der Analysis gewährt.

Jede π-adische Zahl A läßt sich nämlich eindeutig in der folgenden Form darstellen:

$$A = \pi^{a}\, \bar{w}^{\bar{b}}\, \eta_1^{c_1}\, \eta_2^{c_2} \dots \eta_\mu^{c_\mu} \qquad (\mathfrak{p}).$$

Hier ist a die Ordnungszahl von A, $\bar{w}$ ist eine primitive Einheitswurzel höchster Ordnung aus dem Körper $K(\mathfrak{p})$ der π-adischen Zahlen. Dieser Körper enthält alle und nur die $(p^f - 1)\, p^{\nu}$ ten$\equiv$ Einheitswurzeln, wo f den Grad von $\mathfrak{p}$ bedeutet und ν eine bestimmte nicht negative ganze Zahl ist. Andere Einheitswurzeln treten in $K(\mathfrak{p})$ nicht auf. Endlich ist $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\mu$ ein bestimmtes System von $\mu = ef$ direkt angebbaren s. g. Einseinheiten $1 - \alpha\, \pi^{k}$, deren Gradzahlen $k_1, k_2, \dots k_\mu$ ihrer Größe nach von links nach rechts wachsen sollen. Die Exponenten a und $\bar{b}$ sind gewöhnliche ganze Zahlen, $c_1, c_2, \dots c_\mu$ dagegen ganze p-adische Zahlen $c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots$, deren Koeffizienten c_i Zahlen der Reihe $0, 1, \dots p - 1$ sind.

Es sei nun l^n die höchste Potenz von l, welche in $(p^f - 1)\, p^{\nu} = l^n m$ enthalten ist, d. h. es enthalte der Körper $K(\mathfrak{p})$ die l^n ten$\equiv$, nicht aber die l^{n+1} ten$\equiv$ Einheitswurzeln. Ist dann ω eine primitive l^n te$\equiv$ und ω' eine primitive m te$\equiv$ Einheitswurzel in $K(\mathfrak{p})$, so ist jede Potenz $\bar{\omega}^{\bar{b}}$ eindeutig in der Form $\omega^{b}\, \omega'^{b'}$ darstellbar, und wir können A somit von vornherein in der Form:

$$A = \pi^{a}\, \omega^{b}\, \omega'^{b'}\, \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\mu^{c_\mu} \tag{2.}$$

dargestellt annehmen. Wir können und wollen gleich die allgemeinste Voraussetzung machen, daß $K(\mathfrak{p})$ wenigstens die l ten$\equiv$ Einheitswurzeln enthält, daß also n mindestens gleich 1 ist. Andernfalls würde eben ω^{b} einfach fortfallen.

Die erste große Vereinfachung, welche sich bei dieser Behandlung unserer Frage ergibt, besteht nun darin, daß man statt der Grundgleichung $x^{l} - A = 0$ eine andere Gleichung wählen kann, welcher irgend ein primitives Element x' des π-adischen Körpers $K(\mathfrak{p})$ genügt, also z. B.:

$$x' = \tau x, \text{ oder } x' = a + bx, \text{ oder } x' = x^{r} \tag{3.}$$

wo a, b, τ beliebige π-adische Zahlen sein können, von denen nur die beiden

letzten natürlich nicht Null sein dürfen, während r irgend ein durch l nicht teilbarer ganzzahliger Exponent sein kann.

Durch Anwendung der ersten Substitution überzeugt man sich, daß dann x' der Grundgleichung:

$$(4.) \qquad x'^l = A\tau^l = A_0 = \pi^{a+l\bar{a}}\,\omega^{b+l\bar{b}}\,\omega'^{\,b'+l\bar{b}'}\,\eta_1^{c_1+l\bar{c}_1}\dots\eta_\mu^{c_\mu+l\bar{c}_\mu}$$

wird, wo $\tau = \pi^{\bar{a}}\,\omega^{\bar{b}}\,\omega'^{\,\bar{b}'}\,\eta_1^{\bar{c}_1}\dots\eta_\mu^{\bar{c}_\mu}$ eine ganz beliebige π-adische Zahl sein kann. Man kann hiernach a und b stets auf ihren kleinsten Rest modulo l reduzieren und b' stets zu Null machen, da l zu m teilerfremd ist. Ebenso kann man alle Exponenten c_i auf Null reduzieren, wenn p nicht gleich l ist, während für $p = l$ jene Exponenten $c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)}\,l + \cdots$ durch ihre Anfangsglieder $c_i^{(0)}$ ersetzt werden können.

Hieraus folgt, daß für alle von l verschiedenen Primzahlen p die Grundgleichung $x'^l = A$ von vornherein durch die reduzierte Grundgleichung

$$(4^a.) \qquad x'^l = A_0 = \pi^{a_0}\,\omega^{b_0} \qquad (a_0, b_0 < p),$$

ersetzt werden kann. Ist dagegen $p = l$, und bezeichnen wir den zu untersuchenden Primteiler von l jetzt durch $\mathfrak{l}$, so kann man die Grundgleichung folgendermaßen wählen:

$$(4^b.) \qquad x'^l = A_0 = \lambda^{a_0}\,\eta_0^{c_0^{(0)}}\,\eta_1^{c_1^{(0)}}\dots\eta_\mu^{c_\mu^{(0)}} \qquad (\mathfrak{l}) \qquad a_0, c_i^{(0)} < l);$$

hier bedeutet λ wieder eine Primzahl des zugehörigen Körpers $K(\mathfrak{l})$ und die auch hier auftretende $l^{n\,\text{te}}$ Einheitswurzel $\omega = \eta_i$ ist eine genau ebensolche Einseinheit $1 - \alpha_i\,\lambda^{k_i}$ wie die μ übrigen Einseinheiten η_k.

Wir können nun, wie auch p gegeben sein mag, stets drei Fälle unterscheiden, denen je eine mögliche Zerlegung von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ im Körper $K(x)$ entspricht: Es sei zuerst A l^{ter} Potenzrest für den Primteiler $\mathfrak{p}$, es sei also A die l^{te} Potenz einer π-adischen Zahl; dann sind alle Exponenten a, b, b', c_i Multipla von l; also wird allein in diesem Falle $A_0 = 1$. Dann zerfällt aber die reduzierte Funktion $x'^l - 1$ in $K(\mathfrak{p})$ bzw. $K(\mathfrak{l})$ vollständig in l Linearfaktoren:

$$(5.) \qquad x'^l - 1 = (x' - 1)\,(x' - \zeta)\dots(x' - \zeta^{l-1}) \qquad (\mathfrak{p})$$

wo ζ eine primitive l^{te} Einheitswurzel ist, welche n. d. V. in $K(\mathfrak{p})$ vorkommt. Daher ist in diesem Falle $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\dots\mathfrak{P}_l$ das Produkt von l verschiedenen Primteilern, deren Relativordnungen und Relativgrade sämtlich gleich eins sind; in diesem Falle ist die Relativdiskriminante von

$K(x)$ in bezug auf K durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar, weil ja die Grundgleichung (5.) vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Wir erhalten also das erste Resultat:

Ist A l^{ter} Potenzrest zu $\mathfrak{p}$, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $K(x)$ in l verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_l$ deren Relativgrade und Relativordnungen gleich 1 sind; in diesem Falle ist die Relativdiskriminante von $K(x)$ in Bezug auf K durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar. Genau dasselbe gilt unter der obigen Voraussetzung für $p = l$ in bezug auf die Zerlegung von 1.

Es sei jetzt A nicht l^{ter} Potenzrest, also wenigstens einer der Exponenten $a_0, b_0, c_i^{(0)}$ von A_0 von Null verschieden. Dann kann man durch Anwendung der dritten Substitution $x' = x^r$ von (3.) offenbar stets erreichen, daß ein beliebiger unter diesen von Null verschiedenen Exponenten von A_0 gleich 1 wird. Wir wollen auf diese Weise jedesmal den *ersten* nicht verschwindenden Exponenten, welcher in der Reihe $a_0, b_0, c_0^{(0)}, \ldots c_\mu^{(0)}$ auftritt, zu 1 machen. Somit ergeben sich für alle von l verschiedenen Primzahlen p die beiden reduzierten Grundgleichungen:

$$(6.) \qquad x'^l = \pi \quad \text{oder} \quad (6^a.)\ x'^l = \omega,$$

wenn in der ersten als Primzahl von vornherein $\pi\, \omega^{b_0}$ gewählt und durch π bezeichnet wird, und ihnen entsprechen, wie gleich gezeigt werden wird, die beiden möglichen Zerlegungen von $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(x)$:

$$(6^b.) \qquad \mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_0^l \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_0.$$

Dieselben beiden Fälle treten auch für $p = l$ ein, nur sind sie hier etwas anders zu charakterisieren. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen: Die in diesem Falle in $(4^b.)$ auftretenden $\mu + 1$ Einseinheiten $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{\mu-1}$; η_μ unterscheiden sich nämlich dadurch wesentlich von einander, daß die Grade k_i der μ ersten $\eta_i = 1 - \alpha_i\, \pi^{k_i}$ durch l nicht teilbar sind, während für die letzte:

$$(7.) \qquad \eta_\mu = 1 - \alpha_\mu\, \pi^{k_\mu}$$

die Gradzahl k_μ ein Vielfaches von l ist. Hiernach wollen wir die $\mu + 2$ bei der Grundgleichung

$$(8.) \qquad x'^l = \pi^{a_0}\, \eta_0^{c_0^{(0)}} \ldots \eta_{\mu-1}^{c_{\mu-1}^{(0)}}\, \eta_\mu^{c_\mu^{(0)}}$$

auftretenden Exponenten in die zwei Klassen:

$$(8^a.) \qquad a_0, c_0^{(0)}, \ldots c_{\mu-1}^{(0)} \quad \text{und} \quad c_\mu^{(0)}$$

teilen, von denen die erste also $\mu + 1$, die letzte nur den einen Exponenten $c_\mu^{(0)}$ enthält.

Wir unterscheiden nun auch hier die beiden Fälle, daß der erste der von Null verschiedenen Exponenten in (8.), welcher wieder, wenn man will, gleich Eins angenommen werden kann, der ersten oder der zweiten Klasse (8^a.) angehört. So erhalten wir also hier die beiden folgenden Möglichkeiten für die reduzierte Gleichung: im ersten Falle entweder:

$$(9.) \qquad x'^l = \lambda \ (\mathfrak{l}) \quad \text{oder} \quad (9^a.)\ x'^l = \eta_i = 1 - \alpha\lambda^{k_i}\ (\mathfrak{l}) \qquad ((k_i, l) = 1),$$

wenn wieder von vornherein $\lambda\, \eta_0^{c_0^{(0)}} \dots \eta_\mu^{c_\mu^{(0)}}$ als Primzahl gewählt und durch λ bezeichnet sind; im zweiten Falle:

$$(9^b.) \qquad x'^l = \eta_\mu = 1 - \alpha\lambda^{k_\mu} \quad (\mathfrak{l}), \qquad (k_\mu, l) = l$$

und auch ihnen entspricht die erste bzw. die zweite Zerlegung (6^b.) von $\mathfrak{l}$ im Oberkörper $K(x)$.

Der erste von diesen beiden Fällen ist nun dadurch charakterisiert, daß jeder Primteiler $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{p}$ die Relativordnung l hat, daß also $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{P}_0^l$ die l^{te} Potenz eines einzigen Primteilers ist. Ist nämlich $\mathfrak{P}_0$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$, so enthält $K(x)$ ein Element π_0, dessen Norm genau durch die *erste* Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar, welches also sicher eine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{P}_0$ ist; und genau das entsprechende gilt, falls $p = l$ ist, für die Zerlegung $\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_0^l$. In der Tat kann ja bei den Annahmen (6.) und (9.) über die reduzierte Grundgleichung:

$$x'^l = \pi \quad (\mathfrak{p}) \quad \text{bzw.} \quad x'^l = \lambda \quad (\mathfrak{l})$$

offenbar π_0 bzw. λ_0 gleich x' gewählt werden, weil ja $n(x')$ in beiden Fällen genau von der ersten Ordnung nämlich gleich π bzw. λ ist.

Das gleiche tritt aber auch in dem Falle (9^a.) ein: Ist nämlich $k_i = k$ die niedrigste unter den Ordnungszahlen $k_0, k_1, \dots k_{\mu-1}$ zu der wenigstens ein positiver Exponent $c^{(0)}$ gehört, so folgt aus der Gleichung (9^a.):

$$x'^l = A_0 = 1 - \alpha\lambda^k,$$

in der α eine Einheit modulo $\mathfrak{l}$ bedeutet und k durch l nicht teilbar ist, daß:

$$\lambda_0 = \lambda^{l'}\,(1 - x')^{k'}$$

wieder eine Primzahl innerhalb $K(x)$ ist, deren Norm durch die erste Potenz

von λ genau teilbar wird, wenn l' und k' so gewählt sind, daß $ll' + kk' = 1$ ist. In der Tat ist ja:

$$n(\lambda_0) = \lambda^{ll'}(n(1-x'))^{k'} = \lambda^{ll'}(1-A_0)^{k'} = \alpha^{k'}\lambda^{ll'+kk'} = \alpha'\lambda$$

wo $\alpha' = \alpha^{k'}$ eine Einheit ist.

In diesem zweiten Falle, der jetzt also vollständig bewiesen ist, ist die Relativdiskriminante von $K(x)$ in bezug auf K stets durch $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ teilbar, weil dieser Primteiler in K die l^{te} Potenz eines Primteilers in $K(x)$ ist. Es gilt also der zweite Satz:

> Gehört in der multiplikativen Darstellung von A_0 der erste von Null verschiedene Exponent der ersten Reihe an, so ist der zu untersuchende Primteiler von K die l^{te} Potenz eines Primteilers des Unterkörpers $K(x)$; in diesem Falle ist die Relativdiskriminante von $K(x)$ in bezug auf K durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Es gehöre endlich der erste von Null verschiedene Exponent von A_0 der zweiten Reihe an, d. h. es sei jenachdem $p \gtrless l$ oder $p = l$ ist,

$$(6^{\text{a}}.)\quad x^l = \omega\ (\mathfrak{p}) \quad \text{oder} \quad (9^{\text{b}}.)\quad x^l = \eta_\mu\ (\mathfrak{l})$$

die reduzierte Grundgleichung, wo im ersten Falle ω eine in $K(\mathfrak{p})$ enthaltene primitive $l^{n\,\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet und

$$(10.)\qquad p^f - 1 = l^n m \qquad (m,p)=1$$

ist. Ist dann $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{L}$ einer der Primfaktoren von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ in $K(x)$, so hat dieser, wie wir nun zeigen wollen, den Relativgrad $f_0 = l$; also ist notwendig seine Relativordnung $e_0 = 1$ und er ist der einzige Primteiler; d. h. in diesem dritten Falle ist $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ in $K(x)$ unzerlegbar.

Zum Beweise dieser Tatsache zeige ich, daß in $K(x)$ eine Einheit ξ existiert, deren Konjugierte $\xi, \xi^{p^f}, \xi^{p^{2f}}, \ldots \xi^{p^{(l-1)f}}$ alle modulo $\mathfrak{P}$ inkongruent sind, und daß das entsprechende im zweiten Falle $p = l$ gilt.

Im ersten Falle ist schon $\xi = x$ selbst eine solche Einheit. Denn wegen (10.) und (6^{a}.) ist ja:

$$x^{p^f} = x^{1+l^n m} = x(x^l)^{l^{n-1}m} = x(\omega^{l^{n-1}})^m = x\zeta.$$

wo $\zeta = (\omega^{l^{n-1}})^m$ eine primitive l^{te} Einheitswurzel ist, weil für $\omega^{l^{n-1}} = \zeta_0$ dasselbe gilt. Hieraus folgt sofort:

$$x^{p^{2f}} = x^{p^f}\zeta^{p^f} = x\zeta^2$$

weil $\zeta^{p^f} = \zeta^{1+l^n m} = \zeta$ ist, und man erkennt, daß die Potenzen $(\xi, \xi^{p^f}, \xi^{p^{2f}}, \ldots \xi^{p^{(l-1)f}})$ modulo $\mathfrak{P}$ der Reihe nach kongruent $(\xi, \xi\zeta, \xi\zeta^2, \ldots \xi\zeta^{l-1})$ also unter

sich inkongruent sind, da die l^{ten} Einheitswurzeln ζ^i modulo $\mathfrak{P}$ inkongruent sind, wenn $p \geqq l$ ist. Hier ist die Relativdiskriminante durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar, weil dasselbe sogar für die Gleichungsdiskriminante von (6ª.) gilt.

Ist endlich $p = l$, so führt die folgende kurze Betrachtung zu dem gleichen Resultate: Nach unserer Voraussetzung enthält der Körper $K(\mathfrak{l})$ der λ-adischen Zahlen wenigstens die l^{ten} Einheitswurzeln. Nur in diesem Falle tritt für $p = l$ der hier noch zu untersuchende Fall überhaupt ein. Allein dann existiert aber auch in $K(\mathfrak{l})$ die $(l-1)^{\text{te}}$ Wurzel aus $-l$, d. h. die Zahl:

$$\Lambda = \sqrt[l-1]{-l}, \quad \text{für welche } \Lambda^{l-1} = -l$$

ist*). Ich zeige nun in einer kleinen Arbeit**), welche sich unmittelbar an diese Abhandlung anschließt, daß man dann von vornherein die in der reduzierten Grundgleichung allein auftretende letzte Einseinheit η_μ in der Form:

$$\eta_\mu = 1 - \xi_0 \Lambda^l \tag{11.}$$

voraussetzen kann, wo ξ_0 eine Einheit von $K(\mathfrak{l})$ ist, deren Spur

$$s_0 = \xi_0 + \xi_0^l + \xi_0^{l^2} + \cdots + \xi_0^{l^{f-1}} \tag{11ª.}$$

durch $\mathfrak{l}$ nicht teilbar, also einer der Zahlen $1, 2, \ldots l-1$ modulo $\mathfrak{l}$ kongruent ist. Setzt man nun in der hier auftretenden reduzierten Hauptgleichung:

$$x^l = A_0 = 1 - \xi_0 \Lambda^l \tag{12.}$$

$x = 1 - \xi\Lambda$, so ist dies neue primitive Element $\xi = \frac{1-x}{\Lambda}$ so beschaffen, daß seine f konjugierten:

$$(\xi, \xi^{l^f}, \xi^{l^{2f}}, \ldots \xi^{l^{(l-1)f}})$$

modulo $\mathfrak{L}$ inkongruente Einheiten sind, wenn $\mathfrak{L}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}$ in $K(x)$ ist. In der Tat geht dann (12.) über in:

$$(\xi\Lambda - 1)^l = \xi^l \Lambda^l - l_1 \xi^{l-1} \Lambda^{l-1} + l_2 \xi^{l-2} \Lambda^{l-2} - \cdots + l\,\xi\,\Lambda - 1 = \xi_0 \Lambda^l - 1,$$

oder nach Division mit Λ^l unter Berücksichtigung der Gleichung $\Lambda^{l-1} = -l$ in

$$f(\xi) = \xi^l - \frac{l}{\Lambda}\xi^{l-1} + \frac{l_2}{\Lambda^2}\xi^{l-2} - \cdots - \xi - \xi_0 = 0. \tag{12ª.}$$

Betrachtet man diese Gleichung als Kongruenz modulo $\mathfrak{L}$ und beachtet, daß dann die Koeffizienten von $\xi^{l-1}, \xi^{l-2}, \ldots \xi^2$ alle durch Λ also auch durch $\mathfrak{L}$ teilbar sind, so ergibt sich für ξ die Kongruenz:

---

*) Vgl. *K. Hensel*, Exponentialdarstellung algebraischer Zahlen ds. J. Bd. 146. S. 212. Nr. (9.).

**) *K. Hensel*, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers ds. J. Bd. 151 S. 210—212.

$$(12^{b}.) \qquad \xi^{l} \equiv \xi + \xi_0 \pmod{\mathfrak{L}}.$$

Aus ihr folgen durch sukzessive Potenzierung mit l der Reihe nach die Kongruenzen:

$$\begin{aligned} \xi^{l^2} &\equiv \xi^{l} + \xi_0^{l} \equiv \xi + \xi_0 + \xi_0^{l} \\ \xi^{l^3} &\equiv \xi + \xi_0 + \xi_0^{l} + \xi_0^{l^2} \pmod{\mathfrak{L}} \\ &\vdots \\ \xi^{l^f} &\equiv \xi + \xi_0 + \xi_0^{l} + \cdots + \xi_0^{l^{f-1}} \equiv \xi + s_0, \end{aligned}$$

und aus dieser letzten Kongruenz ergibt sich sofort, daß die l Potenzen $(\xi, \xi^{l^f}, \xi^{l^{2f}}, \ldots \xi^{l^{(l-1)f}})$ modulo $\mathfrak{L}$ der Reihe nach kongruent $(\xi, \xi + \xi_0, \xi + 2\xi_0, \ldots \xi + (l-1)\xi_0)$ kongruent, d. h. sämtlich modulo $\mathfrak{L}$ verschieden sind. Auch hier ist die Relativdiskriminante durch l nicht teilbar, weil schon die l Wurzeln $(\ldots \xi + i\xi_0 \ldots)$ modulo $\mathfrak{L}$ inkongruent sind.

Wir können hiernach den dritten Satz aussprechen:

> Gehört in der multiplikativen Darstellung von A_0 der erste von Null verschiedene Exponent der zweiten Reihe an, so ist der zu untersuchende Primteiler $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ von K in $K(x)$ unzerlegbar; in diesem Falle ist die Relativdiskriminante von $K(x)$ in bezug auf K durch diesen Primdivisor nicht teilbar.

Ich zeige nun, wie diese drei allein möglichen Zerlegungen von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ innerhalb $K(x)$ aus der ursprünglichen Gleichung (1) d. h. direkt aus der Natur der Zahl

$$A = \pi^{a}\, \omega^{b}\, \omega'^{b'} \eta_1^{c_1} \ldots \eta_\mu^{c_\mu}$$

erschlossen werden können und führe zu diesem Zwecke das bereits in H. P. S. 119 ff. definierte reduzierte *Legendre*sche Symbol von A in bezug auf $\mathfrak{p}$ ein.

Ich bezeichne nämlich wieder als das *Legendre*sche Symbol von A in bezug auf $\mathfrak{p}$ das aus $\mu + 3$ Elementen bestehende System:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (\zeta^{a}, \zeta^{b}, \zeta'^{b'}, \zeta_1^{c_1}, \ldots \zeta_1^{c_\mu}).$$

Hier ist ζ eine beliebige aber fest gewählte primitive l^{te} Einheitswurzel, ζ' ist eine primitive $(l, m)^{\text{te}}$ Einheitswurzel also stets gleich 1, ζ_1 eine primitive $(l, p)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, welche also auch gleich 1 ist, wenn $p \gtrless l$ ist, und welche für $p = l$ ebenfalls gleich ζ angenommen werden kann. Lassen wir also stets die Elemente fort, deren Basis gleich 1 ist so wird dieses erweiterte *Legendre*sche Symbol von A falls $p \gtrless l$ ist

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (\zeta^a, \zeta^b).$$

Ist dagegen $p = l$, so können wir von vornherein die multiplikative Darstellung von A folgendermaßen schreiben:

$$A = \lambda^a \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\mu^{c_\mu}$$

wo $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\mu$ $\mu+1$ Einseinheiten sind, deren Grade $k_0, k_1, \dots k_\mu$ ihrer Größe nach zunehmen und von denen eine mit der $l^{n\,\text{ten}}$ Einheitswurzel ω übereinstimmt. In diesem Falle wird also das zugehörige erweiterte *Legendre*sche Symbol:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{l}}\right\} = (\zeta^a, \zeta^{c_0}, \zeta^{c_1}, \dots \zeta^{c_{\mu-1}}; \zeta^{c_\mu}).$$

Unter dem reduzierten *Legendre*schen Symbole $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ bzw. $R\left\{\frac{A}{\mathfrak{l}}\right\}$ verstehe ich nun die erste von 1 verschiedene Einheitswurzel, welche bei dem Fortgange von links nach rechts unter den Elementen der Systeme (ζ^a, ζ^b) bzw. (ζ^a, ζ^{c_i}) auftritt, und diese Potenz von ζ werde gleich ζ^a oder ζ^β gesetzt, jenachdem sie der ersten oder der zweiten Gruppe in (8^a) a. S. 204 angehört. Ist kein einziges Element von 1 verschieden, ist also A l^{ter} Potenzrest so soll das reduzierte *Legrendre*sche Symbol gleich 1 gesetzt werden. Hieraus folgt sofort:

Das reduzierte *Legendre*sche Symbol von A ist ζ^a oder ζ^β oder 1 jenachdem der erste von Null verschiedene Exponent der zu A zugehörigen reduzierten Zahl A_0 der ersten Klasse oder der zweiten Klasse angehört oder $A_0 = 1$ ist.

Hier brauchen die beiden Fälle $p \gtrless l$ und $p = l$ nicht mehr unterschieden zu werden. So erhalten wir endlich den folgenden bemerkenswerten Satz, durch den die im Anfang dieser Arbeit gestellte Frage in voller Allgemeinheit beantwortet wird:

In dem durch die reine Gleichung $x^l = A$ definierten Körper $K(x)$ zerfällt ein beliebiger Primteiler $\mathfrak{p}$ des Oberkörpers K in l verschiedene Primdivisoren oder in l gleiche Primteiler oder er bleibt unzerlegbar, jenachdem das reduzierte *Legendre*sche Symbol von A in bezug auf $\mathfrak{p}$ gleich 1, ζ^a oder ζ^β ist; oder auch jenachdem A l^{ter} Potenzrest zu $\mathfrak{p}$ ist, oder die Relativdiskriminante von $K(x)$ den Primteiler $\mathfrak{p}$ enthält, oder endlich keine dieser beiden Möglichkeiten eintritt.

Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers.

Von Herrn *Kurt Hensel* in Marburg a. d. Lahn.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung*) habe ich die folgende eindeutige multiplikative Darstellung aller Zahlen eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers K für den Bereich irgendeines Primteilers $\mathfrak{p}$ gegeben:

$$A = \pi^a w^b \eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \dots \eta_\mu^{c_\mu} \quad (\mathfrak{p}).$$

Hier ist π eine Primzahl, w eine primitive Einheitswurzel höchster Ordnung dieses Bereiches und $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\mu$ sind Einseinheiten

$$\eta_i = 1 + w_i \pi^{k_i} \qquad (i=1,2,\dots\mu)$$

welche *a priori* einfach bestimmt werden können.

Enthält nun der betrachtete algebraische Körper $K(\mathfrak{p})$ nicht die p^{ten} Einheitswurzeln, so sind die Ordnungszahlen k_i aller dieser Einseinheiten η_i durch p nicht teilbar. Im anderen Falle ist allein die Ordnungszahl k_μ der letzten Fundamentaleinheit η_μ ein Vielfaches von p. Unter dieser Voraussetzung ist die Bestimmung auch von η_μ a. a. O. a. S 201 gegeben, aber noch nicht in der für die Anwendungen geeignetsten Form. Dies soll in den folgenden Ausführungen geschehen.

In der oben erwähnten Abhandlung wurde a. S. 212 gezeigt, daß der Körper $K(\mathfrak{p})$ dann und nur dann die p^{ten} Einheitswurzeln enthält,

---

*) *K. Hensel*, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, ds. Journal Bd. 146. S. 189—215.

wenn in demselben auch die $(p-1)^{\text{te}}$ Wurzel aus $-p$ vorkommt. Es sei nun

$$\Pi = \sqrt[p-1]{-p};$$

ist $-p = \pi^e w^g \eta_p$, wo η_p die zugehörige Einseinheit ist, so muß also

$$e = e^{(0)}(p-1),\ g = g^{(0)}(p-1)$$

sein, und es ist $\Pi \sim \pi^{e^{(0)}}$ Ist dann ξ_0 irgendeine Einheit, deren Spur:

$$\xi_0 + \xi_0^p + \xi_0^{p^2} + \cdots + \xi_0^{p^{f-1}} = s_0$$

durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar ist, so kann, wie jetzt gezeigt werden soll, die gesuchte Fundamentaleinheit stets in der Form:

$$\eta_\mu = 1 + \xi_0 \Pi^p = 1 + \xi_0 \pi^{e^{(0)} p} w^{g^{(0)} p} + \cdots$$

geschrieben werden; ihre Ordnungszahl $k_\mu = e^{(0)} p$ ist also wirklich durch p teilbar.

Zum Beweise betrachte ich das folgende System von f Einseinheiten des $e^{(0)\,\text{ten}}$ Grades:

$$\varepsilon_1 = 1 + w_1 \Pi,\ \varepsilon_2 = 1 + w_2 \Pi, \ldots \varepsilon_f = 1 + w_f \Pi,$$

wo $w_1, w_2, \ldots w_f$ eine Basis für den Primteiler f^{ten} Grades $\mathfrak{p}$ bilden sollen. Nach S. 197 der erwähnten Abhandlung bilden diese dann ein Basissystem für alle Einseinheiten des $e^{(0)\,\text{ten}}$ Grades. Es werde ferner gleich $w_1 = 1$ vorausgesetzt. Bilden wir nun ihre p^{ten} Potenzen, so gilt wegen $\Pi^{p-1} = -p$ allgemein die Entwicklung:

$$\varepsilon_i^p = (1 + w_i \Pi)^p = 1 + p w_i \Pi + \cdots + w_i^p \Pi^p = 1 + (w_i^p - w_i)\Pi^p + \cdots,$$

wo durch die Punkte Glieder höherer Ordnung angedeutet werden sollen.

Von den f Einseinheiten $(\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \ldots \varepsilon_f^p)$ ist also die erste von höherer als der $(e^{(0)} p)^{\text{ten}}$, d. h. nicht von der Ordnung von Π^p, weil $w_1 = 1$ ist, während die $(f-1)$ letzten genau diese Ordnungszahl haben; und in ihnen sind die Koeffizienten von Π^p bzw:

$$\xi_2 = w_2^p - w_2, \qquad \xi_3 = w_3^p - w_3, \ldots \xi_f = w_f^p - w_f.$$

Diese $(f-1)$ Zahlen sind modulo $\mathfrak{p}$ linear unabhängig. In der Tat, sind $c_2, \ldots c_f$ ganze Zahlen, so ist

$$\xi = c_2 \xi_2 + \cdots + c_f \xi_f \equiv w^p - w \pmod{\mathfrak{p}},$$

wenn zur Abkürzung:

$$w = c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f$$

gesetzt wird; also ist nur dann ξ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, wenn $w \equiv c_1$ modulo $\mathfrak{p}$ einen ganzzahligen Wert hat; und dies ist wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Zahlen $(1, w_2, \cdots w_f)$ für nicht verschwindende c_i unmöglich.

Hieraus folgt, daß die $(f-1)$ Einseinheiten: $\varepsilon_i^p = (1 + w_i \Pi)^p = 1 + \xi_i \Pi^p + \cdots$ $(i = 2, 3, \ldots f)$ mit einer f^{ten} Einheit desselben Grades $1 + \xi_0 \Pi^p$ dann eine Basis für den Grad $p\, e^{(0)}$ bilden werden, wenn die f Elemente $(\xi_0, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_f)$ modulo $\mathfrak{p}$ linear unabhängig sind. Ein solches Element ξ_0 kann man nun leicht finden, wie die folgenden Betrachtungen lehren:

Jedes der p^{f-1} modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten, durch das System $(\xi_2, \ldots \xi_f)$ linear darstellbaren Elemente $\xi = c_2 \xi_2 + \cdots + c_f \xi_f \equiv w^p - w$ hat die Eigenschaft, daß seine Spur:

$$S(\xi) = \xi + \xi^p + \cdots + \xi^{p^{f-1}} \equiv (w^p - w) + (w^{p^2} - w^p) + \cdots + (w - w^{p^{f-1}}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, und diese p^{f-1} inkongruenten Zahlen sind mithin die einzigen Wurzeln, welche die Kongruenz des $p^{f-1\,\text{ten}}$ Grades $S(\xi) \equiv 0$ (modulo $\mathfrak{p}$) hat. Für die übrigen $p^f - p^{f-1}$ modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Zahlen ist also sicher ihre Spur modulo $\mathfrak{p}$ von Null verschieden. Ist nun ξ_0 irgend eine dieser letzten Zahlen, so sind $(\xi_0, \xi_2, \ldots \xi_f)$ sicher linear unabhängig. Denn eine Kongruenz

$$\bar{\xi} = c_0 \xi_0 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_f \xi_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

kann ja nur bestehen, wenn auch ihre Spur $\bar{\xi} + \bar{\xi}^p + \cdots + \bar{\xi}^{p^{f-1}}$ $\mathfrak{p}$ enthält, und da diese sich auf $c_0 S(\xi_0)$ reduziert, so muß $c_0 = 0$ sein, und dann folgt nach dem vorigen Beweise weiter auch $c_2 = c_3 = \cdots = c_f = 0$. Hiermit ist gezeigt, daß wirklich stets

$$\eta_\mu = 1 + \xi_0 \Pi^p$$

gesetzt werden kann, und damit ist die am Anfang dieser Arbeit aufgestellte Behauptung in vollem Umfange bewiesen.

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung von Direktor Dr. Johannes Tropfke. 2. verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Groß-Oktav. 1921.

Erster Band: Rechnen. Broschiert M. 40.—, gebunden M. 46.—.

Zweiter Band: Allgemeine Arithmetik. Broschiert M. 50.—, gebunden M. 56.—.

(Die weiteren Bände befinden sich in Vorbereitung.)

Lehrbuch der Mathematik. Für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Einführung in die Differential- und Integralrechnung von Professor Dr. Georg Scheffers. 5. verbesserte Auflage. Mit 438 Figuren. Groß-Oktav. 1921. Broschiert M. 100.—, gebunden M. 110.—

Lehrbuch der Algebra von Professor Dr. Alfred Loewy.

Erster Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. 1915.
Broschiert M. 12.—, gebunden M. 21,— + 100 % Teuerungszuschlag.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Professor Dr. Karl Rohn u. Professor Dr. Erwin Papperitz. 3 Bände. Groß-Oktav.

Erster Band: Orthogonalprojektion, Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven usw. Mit 351 Figuren. 4. Auflage. 1913. Brosch. M. 13.—, geb. M. 18.— + 100% Teuerungszuschlag.

Zweiter Band: Oxonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Mit 118 Figuren. 4. Auflage. 1916.
Broschiert M. 7.—, gebunden M. 12.— + 100 % Teuerungszuschlag.

Dritter Band: Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades usw. Mit 157 Figuren. 3. Auflage. 1906. Anastatischer Neudruck 1921. Broschiert M. 30.—, gebunden M. 38.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie von Prof. Dr. Fr. Schur. 2. Auflage. Mit zahlreichen Figuren. Groß-Oktav. 1912. Brosch. M. 6.50, geb. 7.50 + 100 % Teuerungszuschlag.

Einführung in die analytische Geometrie von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Groß-Oktav. 1910. Brosch. M. 10.—, geb. M. 14.— + 100 % Teuerungszuschlag.

Einführung in die Determinantentheorie einschl. der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Groß-Oktav. 1909.
Broschiert M. 15.—, gebunden M. 21.— + 100 % Teuerungszuschlag.

Anwendung der Differential- u. Integral-Rechnung auf Geometrie von Prof. Dr. G. Scheffers.

Erster Band: Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 107 Figuren. Unveränderter anastatischer Neudruck. Groß-Oktav. 1921. Broschiert M. 75.—, gebunden M. 85.—.

Zweiter Band: Einführung in die Theorie der Flächen. 2. verbesserte u. vermehrte Auflage. Mit 110 Fig. XII u. 582 Seiten. Groß-Oktav. 1913. Brosch. M. 15.—, geb. M. 20.— + 100 % Teuerungszuschlag.

Funktionentheoretische Vorlesungen von Heinrich Burkhardt. Besorgt von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

Erster Band, I. Heft: Algebraische Analysis. 3. umgearbeitete Auflage. Oktav. 1920.
Broschiert M. 22.—, gebunden M. 30.—

Erster Band, II. Heft: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 5. Auflage im Druck.

Zweiter Band: Elliptische Funktionen. 3. umgearbeitete Auflage. Oktav. 1920.
Broschiert M. 52.—, gebunden M. 62.—

Zahlentheorie von Professor Dr. Kurt Hensel. Groß-Oktav. 1913.
Broschiert M. 10.—, gebunden M. 15.— + 100 % Teuerungszuschlag.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung von weil. Prof. Dr. Paul Bachmann. Oktav. 1919. Broschiert M. 12.— + 50% Teuerungszuschlag.

Über den sogenannten letzten Fermat'schen Satz von Professor Ferd. Lindemann. Groß-Oktav. 1909. Broschiert M. 3.50 + 100 % Teuerungszuschlag.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Prof. Dr.-Ing. Keiichi Hayashi. Groß-Oktav. 1921. Broschiert M. 45.—

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO. — VORM. G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGS-HANDLUNG — J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG
GEORG REIMER — KARL J. TRÜBNER —
VEIT & COMP. — BERLIN W 10
UND LEIPZIG